This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Digitized by Google

VIII. 7-71

ARTES VERITAS SCIENTIA
1817
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR

Digitized by Google

QA
35
.L87

Digitized by Google

Digitized by Google

EXERCITATIO GEOMETRICA

Digitized by Google

Digitized by Google

Lorenzini, Lorenzo

EXERCITATIO GEOMETRICA

In qua agitur de dimenſione omnium Conicarum ſectionum, Curvæ Parabolicæ, curvæque ſuperficiei Conoidis Parabolici,

Et precipue

Unica enuncitione indicatur centrum gravitatis tam cylindri, quam ſolidi circa axem cujuſlibet ex prædictis ſectionibus geniti a ſegmento exiſtente intet duas ordinatas

ET

Unica itidem enunciatione habetur relatio ipſius ſolidi ad cylindrum

ET

Unica itidem enunciatione declaratur, quam proportionem habeant inter ſe momenta hujuſmodi ſolidorum centraliter appenſorum in ipſa axe, cujus fulcrum ſit in alterutra ejus extremitate.

AUCTORE

LAURENTIO LORENZINIO

VINCENTII VIVIANI DISCIPULO.

FLORENTIÆ. 1721. Typis Regiæ Celſitudinis.
Apud Cajetanum Tartinium, & Sanctem Franchium.

Superiorum Permiſſu.

Digitized by Google

Digitized by Google

Geometriæ Studioſis

Εὐπράττειν.

QUum eæ diſciplinæ, quæ Mathematicarum nomine cenſentur, tam multis, iiſque non vulgaribus argumentis ſint laudandæ, tot tantiſque de cauſis in cœlum extollendæ, cumque tot in omnes artes, ſcientiaſque propemodum univerſas ab eis profluxerint utilitates; doctiſſimorum virorum animos, atque amores, omniumque ſeculorum admirationem, laudemque in ſe plane converterunt; ita ut aliquid eorum diſertiſſimis vocibus addere ſupervacaneum omnino videatur. Duo ſanè arbitror nullo modo prætermittenda, quæque harum diſciplinarum munere nobis impertita, ſemper plurimi facienda exiſtimavi. Horum primum mihi videtur illud, quod ope earum in admirabilem veritatis lucem, inſcitiæ quibus offundimur tenebris, atque omnibus vanis mentis noſtræ anticipationibus expulſis, evadamus. Id autem efficiunt falſa a veris internoſcere docentes, ut non perſuadendo ſolum, ſed cogendo ad veritatem quaſi per manus nos adducant; nam cum omnia prorſus,

quæ nobis deſcribunt, probent, ut ait Cicero, idque certiſſimis demonſtrationibus; quam longiſſime aberit, ut qui celebraverit hæc ſtudia, minus certis, minuſque veroſimilibus rationibus fidem habeat. Alterum eſt, quod admirabili illo ordine, rationumque ſerie, qua inſtruunt, digerunt, atque componunt ea, quæ explicant, in mentes quoque diſcentium lucidum eundem ordinem imprimunt; & quemadmodum qui in ſole ambulant, progreſſu temporis fieri non poteſt, quin colorentur, ita eorum, qui Geometricis ſtudiis incumbunt, ingenia intelligimus ſic eſſe ab iis ſcientiis comparata, ut ordinatim ea, quæ animo concipiunt, diſponant, & ea quæ diſpoſuerint, concinne promant, in ſuaſque partes diſtribuant, & ſuis quæque locis collocent. Quapropter ſive animum induxerint de eloquentia, dicendique arte diſſerere, vel cauſas agere, vel præclara Heroum geſta laudibus celebrare, vel animos auditorum ad aliquid aut capeſſendum, aut fugiendum impellere, ſive de univerſa philoſophia, ſive de juris ſcientia, ſive de Divina natura pertractare, melius quidem, aptiuſque efficiunt, quam ceteri, qui etſi in his artibus cognoſcendis, tractandiſque omnem pæne vitam, omne ſtudium conſumpſerint, in mathematicis tamen diſciplinis minime fuerint verſati. Namque dilucidius explicata ab his omnia ſunt, & admirabili quodam ordine tam inter ſe colligata, connexaque cohærent, tam apta collocatione diſpoſita, ut ex ea mente cognoſcantur profluxiſſe, in qua ſeries illa Geometricarum rationum contineatur, ex quibus nihil omnino commoveri poteſt, quin tota illa facultas labefactetur, & corruat. Hinc fit, ut in Mathematicorum hominum lucubrationibus, in quibus de his ſcientiis non inciderit ſermo, tamen appareat, atque

extet

Digitized by Google

ciunt illos earum non eſſe profectò rudes, verum eas callere; ut qui choreis agendis ſeſe exercuerunt, & ad numerum ſaltare, quamvis intimis ſaltationis præceptis in inceſſu non utantur, tamen ex ipſo totius corporis motu patet an ſaltare didicerint. Quæ duo potiſſimum beneficia; nempe ut & veritatis perveſtigationem, & ordinem in ratiocinando, diſſerendoque aſſequamur, quum Geometriæ referenda ſint accepta, quibus eam laudibus cumulandam eſſe, quantaque ope ei ſemper ſtudendum eſſe ducemus? Verum has duas præclariſſimas dotes illa præcipue Geometria ſibi vindicat, quæ *linearis* appellatur. Senſim enim illa procedit, & a notioribus ad minus nota, & a parvis quidem, ſed veris principiis, quæque nullo modo negari poſſunt (ea namque a natura ipſa hauſimus, atque expreſſimus) ad cognitionem veritatis numquam fallentibus rationibus nos adducit, & hoc quidem tam claro ordine, & concinno efficit, ut nihil ſupra ab humano ingenio excogitari umquam poſſit. Quamobrem liquido patet quam audiendi ſint, qui adeo illi ſe Geometriæ dediderunt, quam *analyticam* vocant, aut Arabica voce *Algebram*, quamque extremum humanæ mentis conatum merito autumant, ut alteram, quam ſupra laudavimus, contemnant: quæ ne in invenienda quidem, expiſcandaque veritate, & problematis, quæ vocant, quibuslibet ſolvendis (quod jure quodammodo ſuo ſibi vindicat Analyſis) vix illi concedit; quod, ut ceteros miſſos faciam, noſter hic auctor in hoc, aliiſque præclaris operibus ſatis ſuperque demonſtravit. Nam linearem Geometriam quamvis non conſilio, quodam tamen, ut ita dicam, fato, ſequutus eſt Laurentius Lorenzinius. Quum enim Florentiæ honeſtiore loco natus eſſet ann. ſal. MDCLII. Non.

Jun.

Digitized by Google

Jun. ideſt quum Geometria, ſi noſtris cum temporibus conferas, parum adhuc profeciſſet, eâ ſummis tantum labris doctore Vincentio Viviano vix deguſtatâ; curſum quem in his ſtudiis bonis avibus inceperat, mox illi reflante fortuna, non ſolum tenere non potuit, verum, ut ſunt res humanæ, ſubita quadam viciſſitudine rerum ſuarum, eo devenit, ut per annos ferme viginti, nullum virum doctum, nullum a literatis hominibus nuntium, nullum denique librum, ne ipſos quidem, quos elementares appellant, habere quiverit. Attamen ingenii ſui acumine fretus, in tanta rerum omnium ignoratione, atque inopia, quæ didicerat animo ſecum repetens, & præſertim ea quæ ad Conica elementa ſpectabant, ea etiam ſcriptis mandare, ne memoria exciderent, cepit: quæ tractu temporis eo crevere, ut non modo, quæ ab Apollonio, & a Viviano præceptore ſuo tractata fuerant, adæquarent, ſed quod ſubtiliori ratione fuerint inventa, & magis generatim demonſtrata, iis ipſis etiam longiſſime (abſit verbo invidia) præſtarent; quæ in duodecim volumina digeſta ſic inſcripta reliquit: *De Conicis, & Cylindricis ſectionibus, & earum Solidis libri XII.* Quum autem poſt tam immane temporis intervallum, in quo innumera propemodum ad mathematicas facultates ſpectantia reperta fuerant, perpauci recentiorum Geometrarum libri ad manus illi obvenerint; in novum repente orbem ſe tranſlatum eſſe arbitrabatur. Quare e veſtigio animum ad novas, ſublimioreſque cogitationes appulit, atque ſex Geometricas Exercitationes, quarum prima hæc eſt, quam in lucem edimus, conſcripſit; aliæ vero, etiam ipſæ lucem viſuræ, ſi hæc æquo, bonoque animo excipiatur, circa infinitas parabolas, ciſſoides,

hy-

Digitized by Google

hyperboloides, & diverſorum generum logarithmicas verſantur. Alias etiam Exercitationes, varia, utiliſſimaque Lemmata continentes reliquit, pluresque reliquiſſet circa novas lineas, & præcipue circa eas quas *Geometricas*, ſeu *Algebraicas* Carteſius appellavit, quarum nonnullas quorumdam ſolidorum corporum ſectione gigni excogitavit; ni tanta fuiſſet modeſtia, ut flammis mandaviſſet, quæ literarum monumentis mandanda fuerant. De his poſtremis operibus quid dicam neſcio; tanta enim corripior admiratione, ut ad ea iis, quibus par eſſet, vocibus extollenda minime ſim idoneus: quamobrem judicium penes eos ſit, qui hanc primam Exercitationem perlecturi ſunt, ut ſicut Pythagoras ex planta pedis, Herculis magnitudinem mente comprehendit, ita illi ex hac prima, reliquas, quæ rerum magnitudine, & inventione hanc antecellunt, cognoſcant. Hoc tantum contendo has Exercitationes apertiſſime demonſtrare, quod initio orationis meæ probandum ſuſcepi, Geometriam linearem Analyticæ nullo modo in abſtruſiſſimis etiam veris excogitandis concedere. Quod etiam magis magiſque evincet admirandum illud, ut ajunt, problema a noſtro Lorenzinio per linearem Geometriam ſolutum; quod ratione analytica per æquationem quinque dimenſionum, ideſt per inviam, atque inacceſſam viam ſolvendum foret. Problema autem erat hujuſmodi: *Invenire conoides parabolicum, quod minimam omnium habeat ſuperficiem, eorum, quæ eidem ſphæræ, & ad eumdem cum ipſa axem circumſcribi poſſunt, planoque ipſam ſphæram ad imum ſui punctum contingente terminantur.* Quod ſi Archimedes ille Geometrarum omnium ſeculorum facile princeps adeo gloriatus eſt, quod ſphæræ ſuperficiem quadruplam eſſe circuli ejus maximi compererit, ut eam in

ſum-

Digitized by Google

ſummo ſui ipſius ſepulcro cum quibusdam ſenariolis, qui hoc declararent, poni curaverit; quanto magis gloriandum erit Lorenzinio noſtro, qui non recentiorum adhibita Analyſi, non infinite parvorum artificio, ſed eadem qua Archimedes inveſtigandi ratione uſus, & ſuperficiem conoidis parabolici dimenſus eſt, quod Archimedeâ ſphæricæ ſuperficiei dimenſione longe difficilius eſt, longeque abſtruſius; & quod multo majorem habet difficultatem, minimam illam ſuperficiem in eo, quod diximus, problemate adinvenerit; quod quam verum ſit, ut luculentius appareat, hic apponendam duximus epiſtolam acutiſſimi Geometræ P. Cæleſtini Rolli è Cæleſtinorum familia, ex qua etiam & propoſitum noſtrum confirmatur, & ad hanc primam Exercitationem non mediocre lumen accedit; necnon ſolutionem continet hujus problematis, quam per æquationem quinque dimenſionum procedere patebit; eam vero, quam excogitavit Lorenzinius, hic non adſcribimus, ne ordinem pervertamus, quem auctor ipſe in editione hujus operis ſibi propoſuerat, & quod non omnino in ordinem redacta eſſet hujus problematis ſolutio, ſed eam inter adverſaria reliquerit. Quæ omnia ſi quis optime perpendat, perſpicuum illi erit, quam jure optimo a laudatiſſimo Viro Vincentio Viviano in Enodatione problematum Gallicorum fuerit noſter hic Geometra præclaris verbis appellatus: *Spectatæ probitatis, acerrimique ingenii vir Laurentius Lorenzini ad Geometricas plane factus exercitationes*; & ab Abb. Grandio, viro extra omnem ingenii aleam poſito, in libro de Infinitis Infinitorum, & infinite parvorum ordinibus in ſcholio Prop. x. quum de logarithmicis quadraticis loquitur, ſic laudetur: *De quibus & egregium tractatum geneſi a nobis perhumaniter accepta,*

con-

conſcripſit inſignis Geometra Laurentius Lorenzini, quem utinam cum aliis tractatibus res geometricas accuratiſſime, & profundiſſime illuſtrantibus, typis aliquando committeret! Et in Appendice 2. de Quadratura circuli, & hyperbolæ, magna cum laude ejus mentionem facit. In Ephemeride autem literatorum Italicorum tom. 15. art. 8. pag. 243. quidquid de quodam Viviani diſcipulo ſuppreſſo nomine dicitur, de noſtro Laurentio, & de hoc ipſo, quod in lucem edimus opere, intelligendum eſt. Verum non adeo linearis Geometriæ addictus erat, ut aſpernaretur analyticam; at exemplo doctiſſimorum virorum utrique ſtuduiſſe optime factum ducebat: quapropter in hanc ad ſummam ſenectutem toto animo incumbebat, æmulatus Catonis illius erga ſapientiam amorem, qui literis Græcis extremis ſuæ vitæ annis ſtuduit, & Solonis unius ex ſeptem Græciæ ſapientibus, qui aliquid quotidie addiſcens mori cupiebat. Sed mors nobis heu nimis invida, tantis inceptis obſtitit, nam VII. Kal. Majas CIƆDCCXXI. dum hæc ipſa typis mandarentur, exceſſit e vita. Tanti igitur viri exemplo mathematicas facultates amplectentes non una tantum via inſiſtamus, ſed & analyticam, & ſyntheticam rationem excolentes, integram, perfectam, abſolutamque Geometriæ formam conſequamur. Hujus autem nobiliſſimæ diſciplinæ ſtudioſi æqui bonique conſulant hanc noſtram qualemcumque operam, & rempub. literariam juvandi, & memoriæ doctiſſimi, acutiſſimique Geometræ conſulendi.

CLA-

Digitized by Google

CLARISSIMO VIRO,
ATQUE EGREGIO GEOMETRÆ
LAURENTIO LORENZINIO
FLORENTINO

D. Cœleſtinus Rollius Aretinus
Monachus Cœleſtinus S.

Legi, Vir Eximie, & perlegi ſumma cum voluptate quod mihi miſiſti ſchediaſma tuum, quantâque ſim admiratione affectus faciliùs tibi exiſtimare quam mihi ſcribere: cum alia enim miratus ſum, tum maxime acutiſſimum ingenium tuum, quo ad profundiora geometriæ arcana, ſine ullo analyticæ recentiorum artis adjumento, tam feliciter penetrare potuiſti, altiſſimaſque veritates ſola antiquorum methodo invenire, ac demonſtrare. Tibi interim gratulor doctrinam tuam; ſed qua illa methodo in quæſtionibus geometricis enodandis nemini utendum conſulerem, niſi ei qui æque ac tu in curvarum natura, proprietatumque cognitione progreſſus ſit, inque veterum geometria, in cujus ſtudio ætatem conſumpſiſti, fuerit verſatus: in quorum quidem numero cum ipſe haud certe ſim, alia via, analytico nempe artificio, & infinite parvorum methodo problema tuum de inveniendo conoide parabolico minimæ curvæ ſuperficiei inter omnes,

quæ eidem ſphæræ, & ad eundem cum ipſa axem circumſcribi poſſunt, quique plano ipſam ſphæram ad imum ſui punctum contingente terminantur, perſecutus ſum. Nec ſane adhibita a me inveſtigandi ratio me fefellit, ea enim duce non modo propoſitum, ni fallor, aſſecutus ſum, ſed alia plura ſcitu fortaſſe non injucunda, fere ſponte ſeſe mihi obtulerunt, quæ tecum, Vir doctiſſime, communicare non abs re judicavi. In hiſce vero exponendis utramque viam, rationemque adhibendam cenſui, & prius quidem analyticam unde omnia deduxi, ut perſpicuum fieret quantum adjumenti, vel ex ipſis algebræ compendiis in problematis enodandis accedat; deinde ſynthetica methodo illa eadem per analyſim inventa, ſeveræ illi tuæ, quâ in geometricis demonſtrandis uteris, ακριβέια *ſubieci; idque potiſſimum feci, ut tibi, vir humaniſſime, morem gererem, qui ſynthetica hac via plurimum delectaris, eâque tam excellis, ut pauciſſimi tecum conferri poſſint. Huc etiam accedit, quod ea mihi ſcribendi ratio in geometricis ſemper arriſit, ut quæ analytice inveniuntur, ea poſtmodum ſynthetice exponantur, ſic enim ingenium acuitur, excitatur ignavia, mens exercetur: atque id equidem paucis video, iisque ſummis geometris contigiſſe, ut iidem utroque in genere laborarent, ſimulque in geometricis problematibus ſequerentur, & illud perutile inveniendi, & hoc acutum demonſtrandi genus. In qua quidem ſententia præ ceteris eſſe memini virum plane doctum, ac omnigena eruditione excultum Cæleſtinum Galianum, Cæleſtinæ meæ familiæ eximium ornamentum, quo ſingulari Dei in me beneficio non modo in mathematicis, ſed etiam in Theologicis præceptore uſus ſum; ſæpe enim amantiſſimus Magiſter admonebat, hanc etiam geometriæ partem eſſe excolendam, ne videlicet eo, quem ex præcipuis hujus præſtantiſſimæ diſciplinæ fructibus judicabat, quique in mentis judiciis dirigendis moderandisque continetur, fruſtraremur. Sed nunc ad propoſitum noſtrum revocetur oratio.*

fig. 185. *Primo igitur conſidera circulum* EQD, *& circa ſuam diametrum verticalem* DQ *verſus* Q *infinite productam veluti circa axem deſcriptas parabolas cujuslibet generis circulum ipſum in uno, vel pluribus punctis* E *pro parabolarum diverſitate tangentes, ac rectâ* BD *eundem circulum in imo ſui puncto* D *contingente terminatas. Quibus poſitis, problema quod tibi inveſtigandum propoſueras erat, ut, (poſito quod dictæ parabolæ circulo cir-*

 cum-

Digitized by Google

circumſcriptæ ſint primi gradus, ſeu Apollonianæ, quæ circa diametrum DQ una cum circulo volvi ſupponantur, ita ut circulus ſphæram, & parabolæ generent conoides parabolicos) inveniatur conoides minimæ curvæ ſuperficiei inter omnes eidem ſphæræ circumſcriptibiles. Sed antequam ad hæc, & alia quæ de iſtis parabolis proponi poſſunt problemata propius accedamus, haud abs re erit tantiſper in ipſo limine in ea contemplatione immorari, ut inſpiciamus quomodo pro ordinis, ſeu gradus diverſitate circulum contingendo parabolæ iſtæ procedant.

II. Et quidem ſi primi ut vocant gradus, ſeu Apollonianæ ſint iſtæ parabolæ, earum & circuli EQD contactus ſuperiori ſemiperipheria GQL continentur, adeout parabola illa, quæ circulum ſtringit in extremitatibus diametri GL nil aliud ſit quam infinitum rectangulum, cujus baſis eſt ipſa circuli diameter; cæteræ vero parabolæ quo punctum contactus E vertici Q habent propiorem, eo baſim BD habent ampliorem, & verticem A humiliorem, ac puncto Q propinquiorem, usque dum deveniatur ad parabolam contingentem circulum in ipſo vertice Q; infinitæ autem ſunt iſtæ parabolæ circulum in Q contingentes prout diverſo deſcribantur parametro, quarum tamen ultima, quæ circulum externe tangit, & quæ eandem curvaturam cum ipſo habet ea eſt, quæ eâdem parametro (diametro nempe QD) cum circulo deſcribitur, ſectiones enim omnes conicæ, eâdem parametro deſcriptæ ſunt ad communem verticem ejusdem curvaturæ, hoc eſt ſi ad eundem verticem A deſcribantur circulus AK, ellipſis AC, fig. 186.
parabola AG, & hyperbola AN eâdem parametro AB, omnes iſtæ ſectiones habebunt in ipſo vertice A arcum infinite parvum AF communem; etenim ordinatâ EF, ubique eſt $ME \times EA : EF^2 :: MA :$ (ſive MB ob AE infinite parvam, quæ addita, vel ablata ab MA ipſam nec auget nec minuit) ad $AB :: ME \times EA : AB \times EA$; ergo $EF^2 = AB \times EA$, & ob $AB \times EA$ eundem in omnibus ſectionibus, erit pariter ordinata EF omnibus ſectionibus communis, omneſque pariter ordinatæ usque ad verticem A communes, & per conſequens arcus AF communis. De parabolis ordinariis hæc dicta ſufficiant, de quibus forſan infra ſermo recurret, jam de aliis breviter loquamur.

III. Si ergo parabolæ illæ circulum EQD externe tangentes fig. 185.
ſint inferioris gradus parabolâ quadraticâ (inferioris gradus pa-

rabolâ quadraticâ ex vero parabolas, in quibus retentâ unitate pro exponente abſciſſarum, poteſtas ordinatarum eſt minor numero binario, ſuperioris vero gradus in quibus poteſtas ordinatarum eſt binario major. Utor autem his exponentibus, & poteſtatibus, quinimmo, & nonnullis algebraicis ſymbolis, ut æqualitatis, proportionalitatis, &c. quoniam ex tuo ſchediaſmate cognovi te minime in his eſſe verſatum) parabola illa, quæ circulum in vertice Q *externe tangit coincidit cum recta linea contingente circulum in eodem vertice; quælibet enim parabola inferioris gradus parabolâ Apollonianâ quantumlibet magnâ parametro deſcripta ad eundem verticem* Q *dati circuli* BQD *extra ipſum circulum cadet. Pro cujus rei explicatione ſit parabola* QIY *talis naturæ ut ordinatæ* LI *poteſtas* LI^{2-n} *æquetur producto ex abſciſſa*
fig. 187.
QL *in parametri* QM *poteſtatem* QM^{1-n} *(quæ parabola, quoniam exponens ordinatarum* $2-n$ *eſt binario minor, poſito* n *numero poſitivo, binario tamen minore, alias non parabolas ſed hyperbolas ad aſymptotos exprimet, erit per ſupradicta inferioris gradus parabolâ Apollonianâ) dico, hanc parabolam quantumvis magnâ parametro ſupponatur deſcripta ſemper juxta verticem* Q *intra circulum cadere, ipſumque poſtea alicubi puta in* Y *ſecare: vel enim* n *eſt unitati æqualis, vel eâ major eſt, vel minor: ſi æqualis; exponens ordinatarum* $2-n$ *pariter unitati æquabitur, & parabola* QIY *in triangulum vertetur, ac proinde prope verticem* Q *intra circulum* QK *cadet: ſi vero* n *eſt unitate major, exponens ordinatarum* $2-n$ *erit unitate minor, adeoque parabola* QIY *convexitatem ſuam axi* QD *vertet, quem etiam in vertice* Q *tanget, & conſequenter intra circulum cadet: tota ergo difficultas eſt in ſuppoſitione quod* n *ſit unitate minor, ita ut exponens ordinatarum* $2-n$ *evadat unitate major; in quo caſu deſcribatur vertice* D *axe* DQ *parametro* QM *parabola* DY *talis ut ſit ordinatæ* ZY *poteſtas* $ZY^{n} = ZD \times QM^{n-1}$ *hæc parabola (ob exponentem numerum* n *unitate minorem) convexitatem ſuam axi* DQ *vertet, quæ proinde intra circulum cadet, ipſumque alicubi puta in* Y *ſecabit, quo poſito dico parabolam* QIY *pariter in* Y *circulum ſecare, ejuſque portionem* QY *intra circulum cadere: etenim ob parabolam* DY *eſt* $ZY^{n} = ZD \times QM^{n-1}$, *ſive (multiplicando utrumque æquationis membrum per* $QM^{1-n} \times ZY^{-n}$) $QM^{1-n} = ZD \times ZY^{-n}$, *& (ſubſtituendo pro* ZD *ejus valore* $ZY^{2} : ZQ$ *ob circu-*

circulum) erit $ZQ \times QM^{1-n} = ZY^{2-n}$ quæ eſt æquatio ſuprapoſita ad parabolam QFY; punctum ergo Y erit etiam ad parabolam QFY. Ordinetur nunc inter Q & Y alia quælibet LF circulum ſecans in K, & quoniam ex hypotheſi erat $ZY^n = ZD \times QM^{n-1}$, LF vero minor quam ZY, & LD major quam ZD, erit LF^n minor quam $LD \times QM^{n-1}$, ſive [multiplicando utrumque terminum per $QL \times QM^{1-n}$] erit $QL \times QM^{1-n} \times LF^n$, hoc eſt (ob $QL \times QM^{1-n} = LF^{2-n}$ propter parabolam QFY) LF^2 minor quam $QL \times LD$, ſive LK^2, ergo LF minor quam LK, ordinata nempe ad parabolam minor quam ordinata ad circulum; quod de omnibus ordinatis a puncto Y ad verticem Q verum eſt, nec punctum Y puncto Q occurret niſi quando parameter QM in infinitum creverit, quo caſu parabola QFY in tangentem ſuam QM degenerabit, & ſola ex ſui ſimilibus circulum datum externe tanget. Q. E. D.

IV. Sed quoniam hic ſumus, ut hoc theorema (meo quidem judicio) non inelegans de angulis contactus hujus parabolici, & circularis e calamo exciderit, non pigebit aliud ſimile theorema circa parabolas altioris gradus parabolâ Apollonianâ ſubjungere. Dico ergo ex omnibus parabolis ſuperioris ordinis parabolâ Apollonianâ nullam dato circulo QKD ad eundem verticem Q inſcribi poſſe, ſed omnes extra ipſum cadere. Sit talis parabola QRX ita ut ordinatâ LR, ſit $LR^{2+n} = QL \times QM^{1+n}$, & fiat diameter circuli DQ ad parametrum QM ut QM^n ad quartam ZX^n, quæ ordinetur ipſi parabolæ, cui pariter ordinetur qualibet alia LR inter X & verticem Q ſecans circulum in K. Ex hypotheſi eſt $QD : QM :: QM^n : ZX^n$; & LR^n minor quam ZX^n, ergo erit $QD \times LR^n$ minor QM^{n+1}, & (multiplicando per QL) erit $QL \times QD \times LR^n$ minor quam $QL \times QM^{n+1}$, ſive (ob æquationem parabolæ QRX) minor quam LR^{2+n}, & demum dividendo per LR^n, erit $QL \times QD$, hoc eſt QK^2 minor quam LR^2, & QK minor quam LR; & LK (quæ minor eſt ipsâ QK) multo minor quam LR, ordinata nempe ad circulum minor quam ordinata ad parabolam: ubique igitur verſus verticem Q ordinatæ ad parabolam QR majores ſunt ordinatis ad circulum QK, quare parabola ipſa extra circulum cadet. Si autem parameter QM parabolæ æquetur radio circuli, parabola ipſa QRX tanget circulum in extremitate quadrantis B; & ſi parameter minor ſit radio circuli, parabola ipſum circulum ſecabit inter Q & B, ſed punctum ſectionis nunquam vertici Q congruet niſi cum parameter QM eſt infinite parva, quo caſu parabola QRX in axem ſuum

QL

QL degenerabit. Omnes ergo parabolæ ſuperioris ordinis parabolâ quadraticâ ad eumdem verticem Q cum dato circulo deſcriptæ extra ipſum cadent: Q. E. D.

V. Hinc per converſas harum duarum propoſitionum deduci poteſt, nulli parabolæ parabolâ Apollonianâ ordinis ſuperioris circulum quantumvis maximum ad eumdem verticem circumſcribi poſſe, ita ut ejus peripheria cadat inter parabolam, & tangentem ſuam ad verticem, & conſequenter nullam coniſam ſectionem iiſdem parabolis ſuperioris ordinis circumſcribi poſſe, (quælibet enim coniſectio ſuum habet circulum æquicurvum, qui nempe diametrum habet parametro ſectionis æqualem, ut ſupra demonſtratum eſt num. II.) Parabolæ vero inferioris ordinis parabolâ Apollonianâ nullum circulum, nullamque coniſectionem poſſe inſcribi, ita ut ejus perimeter inter parabolam, & tangentem ſuam ad verticem non cadat. Unde ſequitur, angulum contactus in circulo, & coniſectionibus infinite magnum eſſe reſpectu angulorum contactus in parabolis gradus altioris, infinite vero parvum reſpectu angulorum contactus in parabolis inferioris gradus; quinimo & quamlibet parabolam determinati gradus ſuum angulum contactus proprium habere determinati ordinis, infinite nempe parvum reſpectu angulorum contactus parabolarum ſibi proxime gradus inferioris, infinite vero magnum reſpectu angulorum contactus parabolarum ſibi proxime ſuperioris gradus; quod etſi minus ad rem pertinere videatur, non pigebit tamen ob theorematis dignitatem demonſtratione aliqua breviter

fig. 188. confirmare. Sint ergo parabolæ AC cujus parameter AH, & AD cujus parameter AG; prioris æquatio ſit $BC^{n} = AB \times AH^{n-1}$, poſterioris $BD^{m+n} = AB \times AG^{m+n-1}$; quare quo minor fuerit numerus m; eo magis parabola AD accedet ad gradum proxime ſuperiorem parabolâ AC, & hæc viciſſim evadet gradus reſpectu illius proxime inferioris. Fiat vero AH^{n-1} AG^{n-1} :: AG^{m} ad quartam AF^{m}, & ex quolibet puncto E inter F & verticem A ducatur ad axem parallela ED parabolæ AD occurrens in D, unde ordinetur DB parabolam AC ſecans in C; ob $AH^{n-1} : AG^{n-1} :: AG^{m} : AF^{m}$, & AE^{m}, ſive BD^{m} minorem AF^{m}, erit $BD^{m} \times AH^{n-1}$ minor quam AG^{m+n-1}, & [multiplicando utrumque per BA] $BA \times BD^{m} \times AH^{n-1}$ minor quam $BA \times AG^{m+n-1}$, ſive (ob parabolam AD) minor quam BD^{m+n}, & (dividendo per BD^{m}) erit $BA \times AH^{n-1}$,

[illegible] ſive

ſive (ab parabolam AC) BC^n *minor quam* BD^n, *& demum* DC *minor quam* BD; *& eodem modo hoc demonſtrabitur de omnibus ordinatis usque ad verticem* A; *quare curva parabolica* AD *inter* AC, *& tangentem* AE *neceſſario cadet, angulusque* CAE *major erit angulo* DAE, *& infinite major, cum inter* AC, AE *infinitæ parabolæ ejusdem ordinis cum* AD *inſeri poſſint comprehendentes cum tangente* AE *angulos determinatam, & finitam rationem inter ſe habentes. Eadem prorſus demonſtratione probabitur, angulum* EAC *infinite minorem eſſe angulo cum eadem tangente* AE *comprehenſo ab alia parabola inferioris proxime gradus; & quod de parabolis dictum eſt valet etiam de omnibus curvis lineis; quare omnes cujuſlibet gradus curvæ (tot autem ſunt iſtæ curvæ quot ſunt numeri integri, vel fracti exponentes poteſtatum ordinatarum ad iſtas curvas; ſane infinities infiniti, cum inter quoſlibet duos integros, vel fractos numeros infiniti ſint alii numeri fracti) proprium habent determinati ordinis infinitorum, vel infinite parvorum reſpective loquendo angulum contingentiæ; ac proinde rectilineus angulus in infinities infinitos ordines angulorum dividi poteſt, quorum ordinum unus eſt eorum angulorum, quos ſectiones conicæ cum tangente comprehendunt. Poſſem hoc aliis modis oſtendere maxime per ſubtenſas infinite parvas angulorum contactus, ſed digreſſionibus ponendus eſt modus.*

VI. *Ad rem igitur revertentes remanet adhuc videndum quomodo tangant circulum* EQD *parabolæ, quæ ſint parabolâ Apollonianâ gradus altioris, diverſa enim ab aliis hoc parabolarum genus habet ſymptomata; & quidem dum earum vertex* A *ab infinita diſtantia a puncto* Q, *ubi eſt quando parabola tangit circulum in extremitatibus diametri* GL *usque ad ipſum circuli verticem* Q *deſcendendo infinitam* HQ *percurrit, jam punctum contactus* E *non totum circuli quadrantem* GQ, *ut in parabola ordinaria, vel in aliis inferioris gradus, metitur, ſed partem aliquam puta* EG, *ita ut parabola quæ circulum in vertice* Q *tangit tangat etiam eundem circulum in alio puncto* E, *ubi nempe peripheriæ occurrit ordinata* FE *ex puncto diametri* F, *quod abſcindit ex centro* C (*facta æquatione parabolæ* $EF^m = FA$, *cujus parameter ſit unitas*) *rectam* CF=1/m-1 *radii* CQ; *etenim ducta tangente circulum* EH, *erit* CH : CQ :: CQ : CF. *& dividendo ac alternando* HQ : QF :: QC : CF; *& componendo* HF : FQ :: QC+CF : CF : fig. 185.

CF :: (*ex hypotheſi*) $m : 1$., *adeoque* HF = m *abſciſſæ* FQ; *quare* FH *quæ ſupponebatur ſubtangens circuli eſt etiam ſubtangens parabolæ verticem in* Q *habentis; cujuſlibet enim parabolæ ſubtangens æquatur abſciſſæ ductæ in exponentem ordinatarum diviſum per exponentem abſciſſarum. Verum in hujus generis parabolis non ſolum parabola quæ tangit circulum in vertice* Q *ipſum pariter in alio puncto tangit, verum etiam parabolæ deſcribi poſſunt, quæ verticem habeant intra circulum, & infra verticem* Q, *& quæ prius circulum ſecando ipſum poſtea externe tangant, donec tandem coincidendo puncta contactus, & ſectionis devenitur ad illam parabolam quæ minimum habet axem* DA, *& quæ in eodem puncto tanget ſimul, & ſecet circulum* DEQ; *hæc autem parabola*
fig. 189. *habet verticem* A *a centro circuli* C *remotum per* $CA = \sqrt{4m-4}\, CQ : m$ [*retenta ſuperiori parabolæ æquatione* $EF^m = FA$] *tangit vero, & ſecat circulum in puncto ubi deſinit ordinata* FE *ad diſtantiam a centro circuli* $CF = CQ : \sqrt{m-1}$. *Facile vero eſt demonſtrare, hanc parabolam in eodem puncto* E, *& contingere, & ſecare circulum; etenim quoniam diſtantia* CA *verticis parabolæ a centro circuli æquatur* $\sqrt{4m-4} : m$ *radii* CQ, *& exponens* m *in æquatione parabolæ* $EF^m = FA$ *ſupponitur major binario, erit ſemper* CA *minor quam* CQ, *& vertex parabolæ* A *intra circulum cadet; quare vertice* A *deſcripta parabola per quodlibet circuli punctum* E *ipſum ſecabit; probandum eſt ergo, ubi ſectionis punctum* E *tale ſit, ut ex eo ordinata ad circulum* EF *abſcindat* $CF = CQ : \sqrt{m-1}$, *parabolam ipſam in eodem puncto* E *eundem circulum tangere. Et quidem quoniam* $CA = \sqrt{4m-4}\, CQ : m$, *&* $CF = CQ : \sqrt{m-1}$, *erit eadem* $CA = \overline{2m-2}\, CF : m$, *& auferendo* CF *remanet* $FA = \overline{m-2}\, CF : m$; *unde poſita* EH *tangente parabolæ* AEB, *& conſequenter ſubtangente* $FH = mFA$, *erit hæc ſubtangens* $FH = \overline{m-2}\, CF$, *cui addendo* CF *fiet* $CH = \overline{m-1}\, CF$, *ſive* $CF = CH : \overline{m-1}$, *& (multiplicando per* CF) *erit* $CF^2 = CH \times CF : \overline{m-1}$; *atqui ſupponebatur* $CF = CQ : \sqrt{m-1}$, *adeoque* $CF^2 = CQ^2 : \overline{m-1}$, *ergo* $CQ^2 = CH \times CF$, *&* $CF : CQ :: CQ : CH$; *quare* EH *tangit circulum in* E, *quæ ex ſuppoſitione erat etiam tangens parabolæ* EA; *parabola ergo* EA *in eodem puncto* E *& tangit, & ſecat circulum* EQ, *qui proinde dicitur oſculari parabolam* EA *in* E, *cum ea enim continet angulum* DEB *infinite parvum, nec ullus circularis arcus duci poteſt inter* ED, *& parabolam* EB.

VII. Concipe, Vir Clariſs., *curvam* A E, *ipſique in puncto* fig. 190.
E *normalem* E C D *in indefinitum productam, in qua ſumi ſemper poteſt punctum* d, *quo ut centro deſcriptus per* E *circulus* E m *tangat curvam in* E, *& alicubi etiam ſecet in* m (*quælibet enim curva in quatuor ad minimum punctis a circulo ſecari poteſt, & punctum contactus æquivalet duobus ſectionibus infinite proximis*) *Porro inter* d, *&* E *ſumtis in normali aliis punctis* D, C *ipſisque ut centris deſcriptis per* E *circulis, hi pariter tangent curvam in* E, *quam alicubi etiam ſecabunt in* M *&c. punctum vero ſectionis* M *eo magis accedit ad punctum contactus* E *quo centrum* D *propinquior fit eidem puncto* E, *donec perventum ſit ad centrum* C, *quo deſcriptus circulus* E R *curvam in eodem contactus puncto ſecat, ſive potius oſculatur, angulumque oſculi* R E M *efficit infinite parvum, nullus enim jacet arcus circularis inter curvam* E M, *& circulum* E R, *paullo enim remoto centro* C *jam circulus eo centro deſcriptus non in* E *ſed in alio puncto curvam ſecabit, neque alteri unquam circulo contingit, ut in puncto ubi ſecat curvam habeat cum ipſa tangentem communem. Et hi dicuntur circuli oſculantes de quibus, Vir Clariſs., in privatis noſtris colloquiis ſæpe commentati ſumus. Punctum vero* C *in omnibus parabolis ſuprapoſitæ æquationis* $EF^m = FA$ *invenitur ſi ſumta* $FG = 1 : \overline{m-1}$ *portionis axis* K H *inter normalem* E K *& tangentem* E H *jacentis ex* G *erigatur axi perpendicularis* G C, *hæc enim occurret normali in quæſito centro* C *circuli oſculantis. Quare denuo conſtat, datum circulum* E Q (fig. 189.) *oſculari in puncto* E *parabolam* E A; *ſumta enim fuit* $FC = CQ : \sqrt{m-1}$, *ſive* (*ob* $CF : CQ :: CQ : CH$) $= CH : \overline{m-1}$.

VIII. Verum, Vir Clariſs., non circulus tantum, ſive alia curva poteſt aliam curvam in eodem puncto, & tangere, & ſecare; ſed dantur etiam in aliquibus curvis puncta quædam, quæ vocant contrarii flexus, in quibus curvæ illæ ab eadem recta linea, & tanguntur, & ſecantur: ſit pro exemplo curva illa, quam Doctiſſimus magnusque Geometra Guido Grandus verſoriam nominat, quamque deſcribit in ſuis quadraturis prop. IV. *& coroll.* VI. *prop.* 3. *in notis ad Galilæi librum de motu naturaliter accelerato. Hæc enim curva* A D E d *in ipſo initio* fig. 191.
A D E *concava eſt verſus ſuam aſymptoton* B C, *indeque ipſi*

vertit ſuam convexitatem, itaut ſi in circulo genitore AHPB *recta* AH, *quæ ſit latus trianguli æquianguli eidem circulo inſcripti, producatur uſque ad aſymptoton in* F, *& ex* F *ordinetur ad curvam recta* FE, *hæc diſterminabit partem concavam* ADE *a convexa* EdM, *ſumptâque in aſymptoto* FC=FA, *juncta* CE *recta linea tanget ſimul, & ſecabit verſoriam in puncto* E: *a qualibet enim puncto* G *remotiore a* B, *quam eſt punctum* C, *duo duci poſſunt rectæ lineæ verſoriam tangentes, una nempe* GD *tangens partem curvæ cavam, altera* Gd *convexam; quæ duæ tangentes, dum punctum* G *eſt in* C, *in unam* CE *coaleſcunt, quæ in confinio concavæ, & convexæ partis tanget inferius convexam partem, & ſupra partem concavam, ſimulque curvam ſecabit, ac proinde dicitur oſculari curvam in puncto* E; *nec enim omnis recta curvam ſecans in puncto* E *dicitur curvam illam oſculari, ſed ea tantum quæ pariter curvam ſecando tangit, hoc eſt quæ proprietatem habet tangentis; quæ nempe in caſu noſtro verſoriæ habeat ſubtangentem* FC *tertiam proportionalem poſt* 2FB, *&* FA.

IX. Hæc curva verſoria maxime affinis eſt hyperbolæ ſecundi gradus, etenim ſicuti ſi inter aſymptotos AB, BC *talis hyperbola conſtituatur, ordinatim applicatæ* FE, LM *erunt reciproce ut quadrata abſciſſarum* LB^2, FB^2; *ita ſi pro abſciſſis* BF, BL *ſumantur rami* AF, AL *ex puncto* A, *& fiant ordinatæ* FE, LM *reciproce quadratis ramorum* AL, AF, *curva hoc modo genita erit noſtra verſoria; in ea enim productum ex qualibet ordinata* FE *in quadratum ſui rami* FA *æquatur ſemper cubo diametri* BA; *eſt enim* $AF^2 : AB^2 :: (AH^2 : AP^2 :: BA \times AP : AP^2 ::)\ BA : AP$, *ſive* FE *ob naturam verſoriæ; ergo ducendo media, & extrema* $AF^2 \times FE = AB^3$. *& univerſaliter natura verſoriæ cujuſlibet gradus hac generali æquatione exprimitur* $AF^m \times FE^n = BA^{m+n}$, *in quo caſu ſubtangens* FC *eſt tertia proportionalis poſt* $mFE : n$, *&* FA; *& punctum inflexionis* E *habetur per ordinatam* FE *cujus ramus* FA *poſſit* $\overline{m+2n} : \overline{m+n}$ *quadrati* BA, *ſive cujus abſciſſa* FB *poſſit* $\frac{m}{m+n}$ *quadrati* BA.

X. Si in deſcriptionibus verſoriæ quas adhibet Clariſs. P. Grandus locis ſupracitatis pro circulo genitore ponatur qualibet ellipſis, alia habebitur verſoria ſimilis primæ; natura enim

verſo-

verſoriæ hac alia proprietate exprimi poteſt, ut (ordinata MP *ad axem* AB) *ſit* AP : PB :: PM^2 : *ad quadratum alterius lineæ conſtantis; quæ conſtans ſi ponatur æqualis ipſi* AB *habebitur verſoria principalis per circulum genita; at ſi pro conſtante ponatur quælibet alia recta major, vel minor ipſa* AB *habebitur alia verſoria eodem prorſus modo genita per ellipſim, cujus diametri conjugatæ ſint* AB, *& linea illa conſtans. In eadem figura ſupponatur* AHB *ellipſis, cujus conjugata diameter ponatur æqualis* BR; *erit punctum* R *initium ramorum* RY *&c. (ſicuti in verſoria primaria per circulum genita, ubi* BR=BA, *initium ramorum erat punctum* A) *itaut ſubtangens* CF *ſit etiam hic tertia proportionalis poſt* 2FB, *&* FR; *& punctum inflexionis* E *habetur per ordinatam* FE, *cujus ramus* FR *æquetur* 2FB; *pariter ſicuti in primaria verſoria erat* $EF \times FA^2 = AB^3$; *ita hic eſt* $EF \times FR^2 = AB \times BR^2$; *etenim, ducta coordinata* Eb *ad axem* AB, *eſt per ſuprapoſitam curvæ naturam,* Ab : bB :: bE^2, *ſive* $BF^2 : BR^2$, *& componendo* AB : FE :: $FR^2 : RB^2$, *quare* $EF \times FR^2 = AB \times BR^2$. Q. E. D. *Denique ſpatium* ABGM *ad partes* G *infinite extenſum quadruplum eſt ſemiellipſeos genitricis* AHB, *& quodlibet ſegmentum* ADMP *abſciſſum per quamlibet ordinatam* MP *quadruplum ſegmenti elliptici* AHQ, *ſicuti de principali verſoria, & de ſuo circulo genitore demonſtravit P. Grandus in ſuis quadraturis. Sed aliter quam ipſe oſtendit facile, & magis univerſaliter hoc idem demonſtrari poteſt ex hac alia hujus curvæ verſoriæ geneſi: Sit quælibet ellipſis* ANB *(in eadem figura) cujus diametri conjugatæ* AB, BR; *tangens ad verticem* AS *ſecetur in* S *a tangente* NS *in quolibet alio puncto* N, *tum producatur ordinata* NP *uſque ad* PM *duplam ipſius* AS; *erit* PM *ordinata ad noſtram verſoriam. Etenim ob naturam verſoriæ ſuprapoſitam erat* AP : PB :: $PM^2 : RB^2$, *atqui ob tangentem* SNT *eſt* AP : PB :: AS : BT :: *(per 42. 3. Apoll.)* $AS^2 : \frac{1}{4}RB^2 :: 4AS^2 : RB^2$, *ergo* $PM^2 : RB^2 :: 4AS^2 : RB^2$, *&* PM = 2AS. Q. E. D. *Ex hac, inquam, geneſi facile deducitur, ſpatium* ADMP *per quamlibet ordinatam* MP *in verſoria abſciſſum quadruplum eſſe ſegmenti, ſeu bilinei correſpondentis* ANn *in ellipſe genitrice; etenim ductis infinite proximis ordinatis* MPN, mpn, *& ex* A *demiſſa ſuper tangente perpendiculari* AV,

 erit

erit (ob ſimilia triangula rectangula Nmn, AVS) Nn : Nm :: AS : AV, *ſive* Nn : Pp :: $\frac{1}{2}$ MP : AV; *ergo* Nn × AV = $\frac{1}{2}$ MP × Pp, *hoc eſt ſpatiolum elementare* MPpd *quadruplum trianguli elementaris* ANn, *& ſumma illorum ſpatiorum nempe tota area* ADMP *quadrupla ſummæ horum triangulorum ſive totius areæ* AnN *curvâ* AnN, *& rectâ* AN *comprehenſæ. Hocque valet non in verſoria tantum per circulum aut ellipſem genita, ſed in qualibet alia curva* ADM *ſimili modo per quamlibet curvam* ANB *prognatam. quinetiam pro tangente ad verticem* AS *ſumi poteſt qualibet alia recta ordinatis parallela ducta ex quolibet alio puncto ſive in ipſa diametro* BA, *ſive in ea producta, eâdemque conſtructione quodlibet ſpatium* ANB *comprehenſum curvâ quâlibet* NB, *& ramis* AN, AB *ductis a puncto illo* A *unde applicata eſt recta* AS, *trasformari poteſt in aliud ſpatium* MGBP *datam habens rationem ad primum* ANB, *applicando ſcilicet ordinatas* PM *in data illa ratione ad dimidias* AS *abſciſſas a recta* AS *per correſpondentes tangentes* NS.

XI. Jam vero ſilentio hic haud certe percurram aliam hu-
fig. 192. *jus curvæ verſoriæ geneſin per ſectionem axi parallelam ſolidi acuti hyperbolici: Deſcribatur enim inter aſymptotos* AB, AD *hyperbola* FC *cujus ordinatæ* DF, df *ad aſymptoton* AD *ſint in ſubduplicata reciproca ratione abſciſſarum* Ad, AD, *quæ hyperbola Meſolabica Clariſs. Viviano dicebatur, revolvaturque talis hyperbola circa aſymptoton* AD, *ſolidum inde proveniens ſecetur plano ad axem* AD *parallelo, erit ſectio illa* BCG *noſtra verſoria; & ſi quidem abſciſſa* AB *æquetur ordinatæ* BC, *ſectio* BCG *erit verſoria primaria per circulum genita, quod ſi* BA *major ſit, vel minor ipsâ* BC, *ſectio* BCG *erit una ex verſoriis a nobis num.* X. *conſideratis genita per ellipſem cujus conjugatæ diametri ſint* BC, BA. *Hoc facile demonſtratur ex ipſa curvæ geneſi, eſt enim quadratum ordinatæ* GE *una cum quadrato conſtantis* ED *ſemper æquale quadrato ordinatæ ad hyperbolam* FD; *quare* $GE^2 + ED^2 : ge^2 + ed^2 :: (FD^2 : fd^2 :: Ad : AD ::)$ Be : BE, *quæ erat proprietas verſoriæ num.* IX. *demonſtrata. Quod ſi hyperbola* FC, *ſit cujuſlibet alii gradus, ita ut ſit* $DF^m : df^m :: Ad^n : AD^n$, *& ſimiliter revolvatur circa aſymptoton* AD, *ſectio* BCG *axi* AD *parallela erit una*

ex

Digitized by Google

ex verſoriis, quarum generalem æquationem dedimus num. IX. *Sed quo tandem nos pertrahet verſoria iſta curva quidem longe præſtantiſſima? hæc pro inſtituto noſtro fuſius pertractaſſe, ſed pro curvæ dignitate levi bracchio attigiſſe ſufficiat.*

XII. Inter aliena forſan a noſtro propoſito diutius quam par erat hucusque vagati ſumus, ut niſi epiſtolæ limites præterire velimus, cetera paucis concludenda nobis ſint. Reſumatur ergo figura 185., *in qua parabola quælibet* AEB *tangat circulum datum in puncto* E, *ex quo ordinetur* EF; *ſitque circuli ſemidiameter* DC=a, DF *quam quærendam mihi propono*=x, *erit* FE=V [2ax-xx], *& ductâ* EH *tangente, ob* CF : FE=FE : FH, *erit* FH= (2ax-xx) : (x-a), *cum autem* EH *ſit communis tangens, tam circuli, quam parabolæ, erit* FH *ſubtangens itidem parabolæ, quæ proinde æquabitur* 2FA [*ſuppoſita nimirum æquatione parabolæ* EF^2=FA, *quod ſi generaliter de parabolis cujuscumque gradus calculum inſtituere quis velit ponere debet æquationem* EF^m=FA, *habebitque ſubtangentem* FH=mFA; *nos autem quoniam ex hac hypotheſi valde prolixus evaderet calculus, ne ſigna algebraica plus æquo increſcant, eum tantum de parabola ordinaria inſtituimus, eo vel maxime quod quisque facile ad alias parabolas, imo & ad alias curvas ipſum applicabit*]. *quare erit* 2FA=(2ax-xx) : (x-a), & FA=(2ax-xx) : (2x-2a), *et* AD=(2ax-xx) : (2x-2a)+x=(xx) : (2x-2a), *& ob* AF : AD=FE^2 : DB^2, *erit* DB=x=DF. *Nil aliud, Vir Clariſs., ſibi vult calculus iſte, quam oſtendere ſemibaſem* BD *cujuscumque parabolæ ordinariæ dato circulo circumſcriptæ æqualem fore portioni* DF *diametri ab ordinata ex puncto contactus* E *abſciſſæ; quod facile patet ex eo quod (ob tangentem circuli* EH) *ſit* HD : DF :: DC : CF, *& componendo* HD+DF, *ſive (ob tangentem* EH *parabolæ, cujus vertex* A, *adeoque* AF=AH) 2AD : DF :: DF : FC. *atqui pariter ob parabolam* AEB; *cujus ſemiparameter æquatur ſubnormali* FC, *eſt* 2AD : DB :: DB : FC; *ergo* DF=DB. *Eodem modo demonſtrari poteſt, ordinatam* QK *eſſe æqualem reliquæ parti* QB *diametri* QD. *Hoc poſito* fig. 185.

XIII. Spatium quodvis parabolicum BAD *cujus æquatio* BD^m=DA, *æquatur* m : (m+1) *rectanguli* BDA, *& in caſu*

caſu noſtro de parabola ordinaria eſt ſubſeſquialterum rectanguli BDA, *& in terminis analyticis æquatur* $x^3 : (3x - 3a)$. *Quare ſi propoſitum ſit circumſcribere dato circulo* EQD *parabolam* BAD *datæ quantitatis, puta æqualem* $\frac{2}{3}$ DC × N, *ſive* $\frac{2}{3}$ aN, *habebimus* $x^3 : (x - a) = 2aN$, & $x^3 - 2aNx + 2aaN = 0$,
fig.185. & 193. *quæ æquatio per circulum, & parabolam ita facile conſtrui poteſt. Poſitis ad angulos rectos* $LR = N + \frac{1}{3}DC$, & $RK = N$, *centro* K *deſcribatur per* L *circulus* LXT, *quem ſecet in* T *parabola* LYT, *vertice* L, *diametro* LR, *parametro radio dati circuli* CD *deſcripta; tum ex* T *ordinata* TG *erit æqualis parti* DF *ſumendæ in diametro circuli dati, ut habeatur (ductâ ordinatâ* FE) *punctum* E *ubi tangere debet circulum parabola ei circumſcribenda æqualis* $\frac{2}{3}$ DC × N.

XIV. Si differentia ſupradictæ quantitatis $x^3 : (2x - 2a)$ *parabolæ proportionalis æquetur nihilo, vel per Huddenii methodum, ſi æquationis ſuprapoſitæ* $x^3 * - 2aNx + 2aaN = 0$ *ſinguli termini multiplicentur per respondentes terminos progreſſionis arithmeticæ* 0, −1, −2, −3; *habebitur* $x = \frac{3}{2}a$, *quod indicat minimam parabolam omnium, quæ circulo circumſcribi*
fig.185. *poſſunt eam eſſe quæ circulum tangit in puncto* E *ubi deſinit* FE *ordinata ex puncto* F *medio radii* CQ; *quare productâ diametro circuli* DQ *uſque ad* $QA = \frac{1}{4}CQ$, *parabola vertice* A, *parametro* CQ *deſcripta erit minima omnium quæ circulo* EQD *circumſcribi poſſunt, ejusque umbilicus erit punctum* Q.

fig.193. *XV. In precedenti figura ſi parabola, & circulus ſe contingunt, ita ut ordinatæ* TG, tg, *æquales evadant, habebitur, ut diximus num.* XIV., *parabola omnium minima. at ubi parabola, & circulus ſecantur in duobus punctis* T, & t, *duo tunc erunt poſitivi valores incognitæ* x *in æquatione, ita ut ſi*
fig.185. *in axe* DQ *ſumantur duæ portiones* DF, Df *æquales ipſis* GT, gt, *ordinenturque* FE, fe, *parabolæ quæ circulum contingunt in punctis* E, & e, *erunt æquales, adeo ut hinc inde a parabola minima ſemper ſint binæ parabolæ æquales uſque dum deventum ſit ad parabolam contingentem circulum in ejus puncto ſupremo* Q, *cui parabolæ erit alia æqualis in altera parte inferiori circulum contingens, quæ ut inveniatur notandum eſt, ſemibaſem* DB *parabolæ contingentis in vertice* Q

æqua-

æqualem eſſe ipſi axi DQ = 2a per dicta num. XII, quare hinc habemus ut num. XIII expoſitum eſt, $x^3 : (2x - 2a) = 4aa$, ſive $x^3 - 8a^2x + 8a^3 = 0$, quæ æquatio diviſa per $x - 2a = 0$ dabit æquationem $x^2 + 2ax - 4aa = 0$, adeoque $x = -a + \sqrt{5aa}$. Hinc ſi ex Q ducatur tangens QM = QC, & ex juncta DM abſcindatur MP = QC, ac reliqua DP ſumatur in axe æqualis DF, ordineturque FE, parabola quæ tangit circulum in E æquabitur parabolæ tangenti in vertice Q. Hácque methodo cuicúmque data parabolæ ex una parte ejus quæ eſt omnium minima æqualis ex altera parte inveniri poteſt; quod dictum valeat de ſolis parabolis quarum contactus arcu QE continentur, illæ enim quæ infra punctum E uſque ad finem quadrantis tangunt circulum majores ſemper fiunt in infinitum, ita ut ultima parabola, quæ circulum ſtringit in extremitatibus diametri in infinitum rectangulum diametrum ipſam circuli pro baſi habentem degeneret.

XVI. Si pro parabolis circulo circumſcribantur triangula, in quo caſu exponens m num. XII., & XIII. æquatur unitati, minimum triangulum, minimumque habens perimetrum habebitur, ſi (ut in parabola factum eſt) diviſo radio CQ biſariam in F ordinetur FE, etenim dictum triangulum circulum tanget in E, eritque triangulum hoc æquilaterum. Memini me jam ante triennium cum adhuc in Euclide prima geometriæ elementa guſtarem apodixin inveniſſe non inelegantem, qua demonſtraveram figurarum omnium parilaterarum circulo circumſcriptarum æquilateras eſſe omnium minimas, minimasque habere perimetros, inſcriptarum vero æquilateras eſſe omnium maximas, maximasque habere perimetros; hujus demonſtrationis, quam jam in adverſariis mei reperi, te, ſi placet, Vir Clariſs., alia occaſione certiorem faciam.

XVII. Quod de minima parabola quadratica, minimisque triangulis dictum eſt valet etiam de omnibus parabolis cujuſlibet ordinis, quarum nempe æquatio ſit $EF^m = FA$; quod ſcilicet minimum ſpatium BAD comprehenſum rectis AD, DB, & qualibet parabola BA circulum contingente tunc habebitur, quando parabola illa tangit circulum in puncto E ubi peripheriæ occurrit ordinata EF ex medio puncto F radii CQ; facta enim per methodum ſupra expoſitam æquatione exprimente

mini-

minimum ſpatium B A D, *talis æquatio dividi poteſt per* $x - \frac{1}{2}a = 0$, *quod indicat ſemper ſumendam eſſe* $CF = \frac{1}{2}CQ$ *ad hoc ut, ordinatâ* FE, *habeatur punctum* E *ubi parabola* BA *minimum ſpatium* BAD *comprehendens tangere debet circulum.*

XVIII. *Quæ hucusque dicta ſunt, & quæ fortaſſe infra dicentur eâdem plane methodo inveniri poſſunt ſi ſpatia* BAD *terminentur per quamlibet aliam ordinatam* bd, *vel* βδ; *poſitâ enim* Dd, *vel* $D\delta = b$, *erit* Fd, *vel* $F\delta = x \pm b$; *cetera ut ſupra, tædet enim eamdem calcare viam: tantum addam ad habendam minimam parabolam cujuſlibet gradus* bAd, *vel* βAδ *applicandam eſſe ordinatam* EF *mediam proportionalem inter* dF, *vel* δF, & CF *ut habeatur punctum* E *ubi parabola minimum illud ſpatium parabolicum comprehendens tangere debet circulum.*

XIX. *Placet hic quod primo de minima parabola ordinaria, minimoque triangulo, deinde univerſaliter de minimis parabolis cujuſlibet gradus analytice aſſeruimus, geometrica aliqua demonſtratione confirmare: ſint ergo parabolæ ejusdem gradus* BEA, rea, *quarum altera* rea *tangat circulum in*
fig. 185. *quolibet puncto* e, *reliqua vero* BEA *tangat in puncto* E *ubi deſinit ordinata ex puncto* F *medio radii* CQ; *dico parabolam* BEAD *minorem eſſe parabolâ* reaD; *quoniam enim* $CF = FQ$, *erit etiam* DF (*quæ eſt tertia proportionalis poſt* QF, FE *ob circulum*) *æqualis ſubtangenti* FH (*quæ itidem eſt tertia proportionalis poſt* CF, *ſeu* FQ, & FE *ob normalem* EC), *quare cum* (*ob parabolam* BEA *cujus æquatio eſt* $EF^m = FA$) *ſubtangens* FH *æquetur* mFA, *erit etiam* $DF = mFA$; *in eadem ratione dividatur axis* Da *parabolæ* rea *in* s, *ut ſit* $Ds = msa$, *cumque* (*ductâ ordinatâ* sn, *ac tangente* np) *ſit etiam* $ps = msa$, *erit* $Ds = sp$; *quare* (*producta, ſi opus eſt, tangente* pn *usque dum ſecet in* q *ordinatam* FE *productam quam neceſſario ſecabit extra circulum*) *per* 27. VI. *elem. rectangulum* $ns \times sD$ *majus erit rectangulo* $qF \times FD$, & *multo majus rectangulo* $EF \times FD$; *eſt autem* $ns \times sD$ *ad* $EF \times FD$ *in ratione compoſita ex ratione* ns *ad* EF *ſeu* rD *ad* BD, & *ex ratione* sD *ad* FD *ſeu* aD *ad* AD, *quare rectangulum* $rD \times Da$ *majus eſt rectangulo* $BD \times DA$, & *parabola* raD *ſubſesquialtera primi rectanguli major parabolâ*

BAD

BAD ſubſeſquialterâ ſecundi rectanguli. Q. E. D. Eadem eſt demonſtratio ſi parabolæ terminentur quâlibet aliâ ordinatâ bd, βδ, tunc enim ad inveniendum punctum E ubi minima parabola tangere debet circulum ordinanda eſt FE media inter dF, vel δF, & FC, ut ſupra dictum eſt, quare etiam in hoc caſu proveniet dF, vel δF æqualis ſubtangenti FH; cetera ut ſupra. Q. E. D.

XX. Si circa axem ACD revolvantur figuræ ut fiat ſphæra EQD, & ei circumſcripti conoides parabolici. quoniam conoides parabolici (poſitâ æquatione parabolæ $EF^m = FA$) æquantur $m:(m+2)$ cylindrorum ejuſdem baſeos & altitudinis, erunt conoides proportionales cylindris ejuſdem baſeos & altitudinis, ſeu proportionales quadratis diametrorum baſium in altitudines ductis. Hinc problemata, quæ de parabolis planis ſoluta ſunt, ſolventur facile de conoidibus; perque interſectionem circuli, & parabolæ non multum abſimili modo, ac num. XIII. factum eſt, circumſcribi poteſt datæ ſphæræ conus, ſive conoides parabolicum datæ quantitatis. Minimum conoides genitum ex parabola cujuſlibet gradus, minimumque conum genitum ex triangulo habebis, ſi ſumtâ $CF = \frac{1}{3}CQ$, ordinatâque FE, parabolam, ſive triangulum BAD circulum in E contingentem circa axem DA revolvas. Demonſtratio eadem eſt, quæ de minimis parabolis planis numero præcedenti tradita, cum hac diſparitate, quod hic, ob $QF = 2FC$, erit $HF = 2FD$, quare (ob $HF = mFA$ per æquationem parabolæ $EF^m = FA$) $DF:FA::m:2$. & in hac ratione dividenda eſt in s diameter Da alterius cujuſlibet parabolæ ɛaD, ut ſit $DS:Sa::m:2$; unde proveniet ſubtangens ps dupla ipſius SD, & factum ex quadrato ordinatæ ns in SD majus (ut mox demonſtrabimus) quam factum ex quadrato qF in FD, multoque majus quam factum ex quadrato EF in FD; atqui (ob homologas ordinatas BF, ns) $ns^2 \times SD : EF^2 \times FD :: ɛD^2 \times Da : BD^2 \times DA ::$ conoides ɛaD : ad conoides BAD; quare illud conoides ɛaD majus erit hoc conoide BAD, quod proinde erit omnium ſphæræ circumſcriptorum minimum. Q. E. D. Ut vero conſtet productum $ns^2 \times SD$ majus eſſe producto $qF^2 \times FD$, quod ſupra ſuppoſuimus, ſequentem propoſitionem unde hoc pendet generaliter demonſtrabimus. Qualibet recta linea DA ita ſecetur in F, ut ſit fig. 189.

ſit

ſit DF *ad* FA *in qualibet data ratione* m *ad* n; *dico factum ex poteſtate* m *portionis* DF *in poteſtatem* n *portionis* FA, *omnium ſimilium factorum eſſe maximum, majus nempe quam* (*ſectâ in alio puncto* S) *factum* $DS^m \times SA^n$. *Etenim ſi* m, *&* n *æquentur propoſitio conſtabit ex* 27. VI. *elem. quod ſi ſint inæquales, ſit* m *major quam* n, *&* DF *major erit quam* FA, *tum deſcriptâ vertice* A *diametro* AD *parabolâ* AE *talis naturæ ut poteſtates* m *ordinatarum proportionentur poteſtatibus* n *abſciſſarum, quæ parabola concava erit verſus axem* AD, *ordinatiſque* FE, SC, *ac ductâ tangente* EH, *erit* HF : FA :: m : n :: DF : FA, *ergo* HF = FD, *quare, per* 27. VI. *elem.* EF × FD *majus erit* HS × SD, *& multo majus* CS × SD, *ſive dicas* $EF^m \times FD^m$ *majus quam* $CS^m \times SD^m$, *& ob* $EF^m : CS^m :: FA^n : AS^n$, *erit* $AF^n \times FD^m$ *majus quam* $AS^n \times SD^m$. Q. E. D.

fig. 185. *Igitur in caſu noſtro quoniam* PS *eſt dupla ipſius* SD *erit* $PS^n \times SD$ *majus quam* $PF^n \times FD$, *quare, ob* PS : PF :: NS : QF, *erit etiam* $SN^n \times SD$ *majus quam* $FQ^n \times FD$. Q. E. D.

XXI. *Eadem quoque problemata ſolvi poſſunt de ſuperficiebus conoidalibus genitis a qualibet parabola* DEA *circulum* DBQ *tangente, & circa diametrum* DQ *revoluta. Sed prius dimetiendæ iſtæ ſuperficies; quod generaliter præſtabimus præmiſſis duobus hiſce lemmatibus in mechanicis, & geometricis apprime utilibus, licet ab aliis jam tradita, & expoſita ſint.*

LEMMA PRIMUM.

XXII. *Si ſupra planum quodlibet plura gravia exiſtant, & e ſingulorum centris gravitatis agantur ad planum illud perpendiculares; ſumma productorum ex ſingulis gravibus in correſpondentes perpendiculares æqualis erit producto ex omnibus ſimul gravibus in perpendicularem ductam ſuper eodem plano ex communi omnium centro gravitatis.*

fig. 194. *Sint ſuper plano* PD *gravia* M, N, *e quorum centris gravitatis ducantur ad planum perpendicula* MP, NQ, *ut &* *aliud* BE *ex communi centro* B: *Dico eſſe* $M \times MP + N \times NQ = (M+N) \times BE$. *Sint ad* PQ *parallelæ* MG, BH *ex punctis* M, B; *eritque* (*ob* B *centrum gravitatis corporum* M, N) M : N :: (NB : BM :: NH : BG ::) NQ − BE : BE − MP, *& factum*

extre-

extremorum æquale facto mediorum, hoc eſt M×BE-M×MP= N×NQ-N×BE: Ergo M×MP+N×NQ=M×BE+N×BE= (M+N)×BE. Q. E. D. Quod ſi plura ſint corpora M, N, A &c. eadem erit demonſtratio, duo enim M, N ut unum corpus conſiderari poſſunt, cujus centrum gravitatis ſit punctum B; & tria M, N, A, ut corpus ſolitarium cujus centrum ſit punctum C, & ita ſi plura exiſtant corpora; quare patet Q. E. D.

COROLLARIUM.

Hinc diviſo quolibet grave acd in ſuas componentes particulas infinite parvas a, b, d &c. ductisque ad quodlibet planum fh perpendiculis af, bg, dh, &c. erit ſumma factorum ex qualibet particula in ſuum perpendiculum æqualis ſumma omnium componentium, ſeu integro gravi abcd ducto in perpendiculum CK ex ipſius centro gravitatis C. fig. 195.

LEMMA SECUNDUM.

XXIII. Si plures magnitudines circa axem aliquem revolvantur, ſumma productorum ex qualibet magnitudine in viam, ſeu peripheriam, quam in revolutione deſcribit proprium cujusque magnitudinis centrum gravitatis, æquatur producto ex omnibus ſimul magnitudinibus in viam, ſeu circumferentiam, quam deſcribit commune omnium gravitatis centrum:

Magnitudines M, N revolvantur circa axem PQ: dico ſummam productorum ex M in peripheriam deſcriptam radio PM, & ex N in peripheriam deſcriptam radio NQ æquari producto ex M+N in peripheriam deſcriptam radio EB a centro communi gravitatis B. Eademque eſt demonſtratio quæ lemmatis præcedentis: ſtante ſiquidem eâdem conſtructione eſt M:N::NQ-BE:BE-MP:: peripheria radii NQ demtâ peripheriâ radii BE: ad peripheriam radii BE demtâ peripheriâ radii MP; & productum extremorum æquale producto mediorum, hoc eſt M in peripheriam radii BE minus M in peripheriam radii MP æquatur N in peripheriam radii NQ minus N in peripheriam radii BE; ſive M in peripheriam radii BE una cum N in peripheriam ejusdem fig. 194.

 radii

radii BE *æquatur ipſi* N *in peripheriam radii* NQ *una cum* M *in peripheriam radii* MP. Q. E. D. *Idem quod ſupra diximus in lemmate primo hic dicendum ſi plura ſint pondera* M, N, A *&c. quare &c.* Q. E. D.

COROLLARIUM.

fig. 195. *In figura præcedentis corollarii diviſâ qualibet magnitudine* acd *in componentes particulas infinite parvas* a, b, d, *&c. revolutâque circa axem aliquem* fh, *ſumma productorum ex qualibet componente in peripheriam quam in revolutione deſcribit ejus centrum gravitatis, hoc eſt ſolidum ipſum, ſive ſuperficies quam magnitudo* acb *in revolutione deſcribit, æquabitur producto ex ipſa magnitudine* acb *in viam ſeu peripheriam radio* CK *deſcriptam a totius magnitudinis centro gravitatis* C. *Hæc eſt celebris Guldini regula permagni uſus in mechanicis, ac geometricis.*

XXIV. His poſitis ſit qualibet figura KSAH *comprehenſa* fig. 196. *diametro* AH, *ordinatis* AS, HK, *& qualibet curvâ* SDK, *fiatque ad eamdem diametrum* AH *alia curva* MRN *cujus ordinatæ* RB *ſint æquales normalibus* DF *primæ curvæ: Dico ſuperficiem* KDS *genitam a curva* KDS *circa axem* AH *revoluta eſſe æqualem circulo cujus radius poſſit duplum areæ* NMAH *comprehenſæ ab alia curva, iiſdemque ordinatis, & diametro. Siquidem ductis ordinatis infinite proximis* RDB, rdb, *&* dE *ad axem parallelâ, erit (ob ſimilia triangula* DdE, DBF) Dd *ad* dE, *ſive ad* Bb *ut* DF *ſive* BR *ad* BD; *ergo* Dd × DB = BR × Bb = *ſpatiolo* RBbr, *& hoc ubicumque ordinentur* BR, br; *quare ſumma ſpatiorum* RBbr, *ſive totum ſpatium* NMAH *æquatur ſummæ omnium* Dd *in correſpondentes ordinatas* DB, *ſive (per corollarium lemmatis primi) rectangulo ex curva* KDS *in ordinatam* CG *ductam ex centro gravitatis* C *ipſius curvæ* KDS; *quod ſi ſpatio* NMAH *ſupponatur æquale rectangulum* ALQH, *erit hoc rectangulum æquale rectangulo ex curva* KDS *in* CG, *&* QL *ad* KCS *erit reciproce ut* CG *ad* QH, *ſive ut peripheria deſcripta radio* CG *ad peripheriam deſcriptam radio* QH; *& productum extremorum æquale producto mediorum, hoc eſt* QL *in peri-*

pheriam

Digitized by Google

pheriam radii QH, *nempe cylindrica ſuperficies deſcripta a recta* QL *circam axem* AH *revoluta, ſive dicas* (*per* XVI. *lib.* I. *de ſph. & cyl. Archimedis*) *circulus, cujus radius poſſit duplum rectanguli* ALQH, *ſive duplum areæ* NMAH, *æquatur ipſi curvæ* KCS *ductæ in peripheriam radii* CG, *nempe* (*per coroll. lem.* 2.) *curvæ ſuperficiei deſcriptæ ab ipſa curva* KCS *circa axem* AH *revoluta.* Q. E. D.

XXV. *Dimetiendum igitur ſi fieri poteſt ſpatium* NMAH, *& in terminis analyticis ponendus circulus ſuperficiei genitæ a curva* KCS *circa axem* AH *revoluta æqualis, quo facto omnia problemata quæ de figuris planis circulo dato* DEQ *circumſcriptis ſoluta ſunt ſolvi pariter poſſunt de ſuperficiebus ab ipſis curvis* BEA *in ipſa rotatione circa axem* DQ *genitis, ſeu de ſuperficiebus ſolidorum eidem ſphæræ circumſcriptorum. Si ſolida iſta ſint coni, & quæratur conus minimæ curvæ ſuperficiei inter omnes eidem ſphæræ circumſcriptibiles, invenietur ſumendam eſſe* $DF = \sqrt{2CD^2}$ *æqualem nempe lateri quadrati eidem circulo inſcripti, ad hoc ut ordinata* FE *punctum* E *determinet, ubi latus coni minimæ curvæ ſuperficiei circulum ſphæræ genitorem tangere debet; quod placet etiam geometrice demonſtrare; ſed præmittendum ſequens.* fig. 185.

LEMMA TERTIUM.

XXVI. *Diviſâ quâlibet rectâ* QD *biſariam in* C, *& inter* DC, DQ *poſitâ medio loco proportionali* DF, *erit rectangulum ex* QF *in* FC *ad* FD *applicatum omnium ſimilium maximum, majus nempe, quam, diviſâ recta* DQ *in quolibet alio puncto* S, *rectangulum* QS *in* SC *ad* SD *applicatum.* fig. 189.

Variis modis hoc lemma demonſtrari poteſt prout variis curvis quis utitur; nos brevitatis, cui unice ſtudemus, cauſâ, unam, vel alteram, & fortaſſe etiam tertiam demonſtrationem hic afferemus. Sit ergo primo ſuper QC *parabola* QMC *cujus axis* SM *perpendicularis ipſi* AC *ex ejus medio puncto* S, *eique ordinetur* FM *ex puncto* F, *& in puncto* M *tangat* ME, *quæ producatur donec concurrat cum* FCD *in puncto aliquo, cujus diſtantia a puncto* F *dicatur ſubtangens; eritque* ES-MF *ad* MF *ut* FS *ad ſubtangentem; ſive* $\overline{ES-MF}$ *ductam in parametrum ad*

MF

MF ductam in eandem parametrum, ut FS ad FD ductum in ſubtangentem; atqui primum antecedens duplum eſt ſecundi antecedentis. ergo & primum conſequens duplum ſecundi conſequentis; nempe MF in parametrum, ſive rectangulum QFC, duplum ipſius FS in ſubtangentem. item ob QD : FD :: FD : CD, erit dividendo QF : FC :: FD : DC, & per converſionem rationis QF : QF − FC, ſive QF : 2FS :: FD : FC, & $QF \times FC = 2FS \times FD$; ſed demonſtratum fuerat $QF \times FC$ duplum itidem ipſius FS in ſubtangentem; ergo FD eſt ipſa ſubtangens; quare juncta DM tanget parabolam in M; igitur ME ad ES (ſive FD ad DS) eſt in minori ratione quam MF ad MS, ſive (ob parabolam) quam $QF \times FC$ ad $QS \times SC$, & $QF \times FC$: FD majus quam $QS \times SC$: SD. Q. E. D.

Secundo ſupponatur QMC ſemicirculus ſuper diametro QC erectus, ordinataque ex puncto F recta FM, deſcribatur per M vertice D diametro DF parabola DMC; jam, ut ſupra dictum eſt, $QF \times FC = 2FS \times FD$, ergo FS : FC :: QF : 2FD, atqui eſt etiam FS : FC :: QF : ad circuli ſubtangentem abſciſſam per tangentem in puncto M, quare 2FD aequatur huic ſubtangenti; itidem tangens parabolae DM in eodem puncto M abſcindit ſubtangentem duplam ejuſdem FD; ergo parabola, & circulus in puncto M communem habent tangentem, proindeque ſe invicem tangunt, circuluſque intra parabolam totus jacebit; quare DF ad DS (ſeu ob parabolam MF^2 ad ES^2) erit in minori ratione quam MF^2 ad MS^2, ſive QFC ad QSC (ob circulum), & QFC : FD majus quam QSC : DS. Q. E. D.

Tertio ſit curva AEM verſoria num. VIII. IX. & X. conſide-
fig. 191 rata, cujus ellipſis, vel circulus genitor AQK habens centrum O, ſumanturque continue proportionales OB, bB, AB, dico pariter $Ab \times bO$: Bb maximum eſſe. Etenim ordinata bE, ductaque tangente CEK, erit Bb : 2bK :: (CF : 2FE :: (per dicta num. VIII.) $AF^2 : 4FB^2 :: AH^2 : 4HP^2 :: BA \times AF : 4BF \times FA$ :: BA : 4BF :: BA : 4Ab ::) OA : 2AB, ſive Bb : bK :: OA : Ab; atqui Ob : Ab :: Bb : ad ſubtangentem circuli; ergo ex aequo perturbate Ob : OA :: bK : ad ſubtangentem circuli; ſive ſubtangens circuli ad radium OA, ut ſubtangens verſoriae bK, ad abſciſſam a centro Ob, poſitis autem AB, bB, OB continuis proportionalibus, ſubtangens circuli ordinatae ex

puncto

puncto b *correſpondens æquabitur ipſi diametro* (*etenim erit dividendo* AB : BO :: AB : BD, *ſicut etiam* Ab : bO :: *ſubtangens* : Bb) *ſive erit dupla radii; quare ſubtangens verſoriæ* Kb *erit in eo caſu dupla abſciſſæ* Ob; *hinc ſi aſymptotis* OA, OC *deſcripta ſupponatur per punctum* E *hyperbola ſecundi gradus, ut nempe quadrata ordinatarum* Eb *reſpondeant reciproce abſciſſis* Ob, *& conſequenter ut habeat ſubtangentes* Kb *duplas abſciſſarum* OB; *hæc hyperbola in puncto* E *communem cum verſoria habebit tangentem* EK, *& extra verſoriam jacebit* (*cum enim ſupra demonſtratum ſit ſubtangentes verſoriæ eſſe ad abſciſſas ut ſubtangentes circuli ad radium, & ſubtangens circuli ordinatæ* Qb *correſpondens ſit dupla radii, in ordinatis vero a centro* O *remotioribus ſubtangentes circuli ſint minores quam duplæ radii, in propinquioribus majores; erit etiam ſubtangens verſoriæ ordinatæ* Eb *correſpondens dupla abſciſſæ* Ob, *in ordinatis autem remotioribus a centro* O *ſubtangentes verſoriæ erunt minores, in propinquioribus majores quam duplæ abſciſſarum; cum tamen ſubtangentes hyperbolæ ſint ubique earundem abſciſſarum duplæ; ergo hyperbola in partibus remotioribus altiores habet tangentes quam verſoria, in partibus propinquioribus humiliores, quare extra verſoriam jacebit*). *igitur, ex quolibet alio puncto* a *ordinata ad verſoriam recta* Da; *erit factum* $Eb^2 \times Ob$ *majus facto* $Da^2 \times Oa$; *atqui, per dicta num.* X., Eb^2, Da^2 :: (Ab : Bb) . (Aa : Ba) *ergo* Ab × bO : Bb *majus eſt quam* Aa × aO : Ba. *Quod* E. D.

Alias ejuſdem lemmatis hic afferre demonſtrationes ſupervacaneum fortaſſe videri poſſet; verum ob novæ qua utar curvæ fig. 197.
conſiderationem, cæteris prætermiſſis, unam adhuc addere lubet. Diviſa ergo recta DQ *bifariam in* C, *vertice* C, *diametro* CQ *deſcribatur curva* CML *talis naturæ ut ordinatarum* FM, LS *quadrata proportionalia ſint abſciſſis a vertice* CF, CS *ad diſtantias* DF, DS *ipſarum ordinatarum a puncto fixo* D *applicatis; ſive ut abſciſſa a vertice* CF *ſit ad abſciſſam* FD *a puncto* D, *ut quadratum ordinatæ* FM *ad quadratum alterius lineæ conſtantis puta* CE; *quæ ſi ponatur ex vertice* C *ordinatis parallela, & ex* E *agatur* EK *parallela diametro* CF, *erit ipſa* EK *curvæ aſymptotus, nam ad infinitam a vertice* C *diſtantiam ordinata* FM *evadit æqualis conſtanti* CE, *quippe ibi erit etiam infinita abſciſſa* CF *æqualis infinitæ* DF. *Sub-*

tan-

tangens hujus curvæ (*ut infra patebit*) *erit quarta proportionalis poſt conſtantem* DQ, *abſciſſam* DF *a puncto* D, *&* *duplam abſciſſam a vertice* CF; *quare ubi tres* DQ, DF, DG *ſint*, *ut in caſu noſtro*, *continue proportionales*, *adeoque dividendo ſit* FC : FQ :: DC : DF, *erit etiam* FC *ad* FQ *ſive* 2FC *ad* 2FQ *ut* 2FC *ad ſubtangentem*, *quæ proinde æquabitur* 2FQ. *Hinc aſymptotis* QC, QK *deſcripta per* M *hyperbola ſecundi gradus*, *ut nempe quadrata ordinatarum* FM *reciproce reſpondeant abſciſſis* FQ, *ac proinde habeat ſubtangentes duplas abſciſſarum*, *hæc hyperbola communem in* M *cum curva* CM *habebit ſubtangentem*, *&* *tota extra ipſam jacebit*, *quare ordinata ad curvam illam qualibet alia* LS, *erit ratio* QR *ad* QS *major ratione* LS^2 *ad* MF^2, *ſive* CS : DS *ad* CF : DF, *&* QR $\times$ FC : FD *majus quam* QS $\times$ SC : SD. Q. E. D.

XXVII. *Curva* CML *in hac ultima demonſtratione adhibita*, *cum a curva verſoria non admodum differat*, *nec valde diverſas ab ea inſignes habeat proprietates a nemine*, *quod ſciam*, *hactenus adnotatas*, *in ejus contemplatione tantiſper immorari nos jubet* : *&* *quidem quo ad ejus generationem eodem modo generatur per hyperbolam*, *ac per ellipſem*, *vel circulum verſoria*, *adeo ut hanc verſoriam ellipticam*, *illam verſoriam hyperbolicam appellare liceat*. *In noſtra verſoriæ deſcriptione num.* X. *expoſita ſi loco ellipſis hyperbolam ponas hanc habebis curvam*;
fig.197. *ſit in eadem figura* CN *hyperbola cujus vertex* C, *diameter transverſa* CD, *conjugata* CE, *tangens ad verticem* CH *ſecetur in* H *ab alia* NS *tangente in quolibet alio puncto* N, *unde ordinetur* NF, *quæ producatur uſque dum occurrat curvæ* CM *in* M; *dico ordinatam* FM (*quod etiam de verſoria eodem prorſus modo per ellipſem genita num.* X. *probavimus*) *duplam eſſe ipſius* CH : *etenim ob naturam curvæ* CM *ſupradictam eſt* CF : FD :: $FM^2 : CE^2$; *atqui ob tangentem* NS *eſt* CF : FD :: (CT : TD :: CH : DS :: (*per* 42. *III. Conic.*) $CH^2 : \frac{1}{4}CE^2$ ::) $4CH^2 : CE^2$, *ergo* $FM^2 = 4CH^2$, *&* $FM = 2CH$. *Quod* E. D. *Hinc infertur ſpatium quodvis* CMF *coordinatis* CF, FM, *&* *curva* CM *comprehenſum quadruplum eſſe correſpondentis ſegmenti hyperbolici* CN *ramis a vertice* C *ductis*, *&* *curva hyperbolica ſimiliter comprehenſi*, *ſicuti de verſoria per ellipſem genita num.* X. *demonſtravimus*.

Item

Digitized by Google

Item ſi in deſcriptione verſoriæ, quam adhibet Cl. P. Grandus in notis ad Galilei librum de motu naturaliter accelerato propoſ. III. *coroll.* VI. *pro circulo vel ellipſe hyperbolam ſubſtituas noſtram hanc habebis verſoriam hyperbolicam* CM : *ſit in eadem figura hyperbola ſupra deſcripta* CN, *quam tangat ad verticem recta* CP, *cui ex altera diametri extremitate* D *ducantur quotlibet rectæ* DP, Dp *hyperbolam ſecantes in* N, R, *unde ordinatis* NF, RS, *compleantur rectangula* PCF, pCS, *ſive* CM, CL *ad alias partes diametri; curva per puncta* M, L *ducta erit noſtra verſoria hyperbolica, ſiquidem ex ejus natura in poſtrema lemmatis demonſtratione indicata eſt* $CF : DF :: FM^2 : CE^2$, *atqui* $CF : DF :: CFD : FD^2 :: CFD : FN^2$ ($:: CD^2 : CE^2$) $+ FN^2 : FD^2$ ($:: PC^2 : CD^2$) $:: PC^2 : CE^2$; *ergo* $FM^2 : CE^2 :: PC^2 : CE^2$; *&* $FM = PC$. Q. E. D. *Ex hac generatione demonſtrari facile poteſt quod ſupra aſſumpſimus in ultima lemmatis demonſtratione, ſubtangentem nempe hujus curvæ eſſe quartam proportionalem poſt* DC, *duplam abſciſſæ* CF, *&* DF; *etenim ductis infinite proximis* DPN, Dpn, *productiſque ordinatâ* FN, *& infinite exiguâ differentiâ abſciſſarum* nN, *uſque dum occurrant ipſi* DR *in* f, *&* g; *erit ordinata* FM *ad ſubtangentem, ut* Lm *ad* Mm, *ſive ut* Pp *ad* Nn, *atqui ratio* Pp *ad* Nn *componitur ex rationibus* Pp *ad* Nf, Nf *ad* Ng, *&* Ng *ad* Nn, *quarum prima eadem eſt quæ* CD *ad* DF, *ſecunda eadem quæ* CP *ad* CD, *& tertia (ductâ tangente* RNT*) eadem quæ* DT *ad* TF, *ſeu* DC *ad* 2CF *ob tangentem hyperbolæ* NT; *quare ratio ordinatæ* FM *ad ſubtangentem componitur ex rationibus* CD *ad* DF, CP *ad* CD, *&* DC *ad* 2CF, *ſive ex rationibus* CP *ſeu* FM *ad* DF, *&* DC *ad* 2CF; *adeoque ratio* DC *ad* 2CF *componitur ex rationibus* DF *ad* FM, *&* FM *ad ſubtangentem, ſeu eadem eſt ac ratio ipſius* DF *ad ſubtangentem.* Q. E. D. *Eodem prorſus ratiocinio invenietur, ſubtangentem verſoriæ per ellipſem genitæ ſimili analogia in axe ſumendam eſſe.*

Verumenimvero ſi alteram curvæ verſoriæ per ellipſem, vel circulum genitæ conſtructionem quam tradit idem doctiſſimus P. Grandus in quadraturis prop. IV. *ad hyperbolam applicetur, non eadem emerget noſtra curva* CML, *ſed ejus reciproca* VX *jacens ad alias partes aſymptoti* EK, *ita ut* EG, EK *ſint ejus*

 aſym-

aſymptoti. Ejuſmodi applicatio talis erit: ſit DB *hyperbola oppoſita hyperbolæ* CN, *cujus tranſverſa diameter eadem* CD, *& ab ejus altero extremo* D *ad alterius extremi tangentem* CG *inclinata* DG *ſecet hyperbolam in* B, *unde ordinetur* BA *abſcindens* DA, *cui æqualis ex puncto* G *ordinetur recta* GV *diametro* DC *parallela, atque hoc ſemper fiat, quouſque per puncta* V, X, *ſic inventa tranſeat curva* VX; *dico hanc curvam reciprocam eſſe curvæ* CML; *hoc eſt (ad eamdem abſciſſam* CF *ordinatâ* FMV, *quæ occurrat curvæ* CM *in* M, *& curvæ* XV *in* V) *rectangulum ex ordinatis* FM *in* FV, *eſſe ubique idem & conſtans, æquale nempe quadrato ipſius* CE *quæ eſt hyperbolæ genitricis diameter ſecunda. Etenim ratio* CG^2 *ad* CE^2 *componitur ex ratione* CG^2 *ad* CD^2 *ſeu* BA^2 *ad* AD^2, *ſive (ob* AD = GV = CF) NF^2 *ad* CF^2, *& ex ratione* DC^2 *ad* CE^2, *ſive (ob hyperbolam)* DFC *ad* FN^2, *adeoque eſt eadem ac ratio* DFC *ad* FC^2, *ſeu* DF *ad* FC, *hoc eſt (ob naturam curvæ* CM) CE^2 *ad* FM^2; *quare erit* CG, *vel* FV : CE :: CE : FM, & MFV = CE^2. Q. E. D. *Curva ergo* VX *eſt reciproca curvæ* CM; *ſicuti verſoria hac conſtructione per ellipſem genita reciproca eſt verſoriæ per eamdem ellipſem alia conſtructione genitæ; duæ enim iſtæ conſtructiones ad ellipſem, vel circulum applicatæ eaſdem quidem verſorias producunt, ſed contrario modo reſpectu ſui axis ſitas, has autem reciprocas eſſe in iiſdem notis ad Galileum coroll.* V. *prop.* IV. *idem Clariſſimus Geometra oſtendit.*

Ex dictis non obſcure conſtat affinitas harum curvarum CM, *&* VX *cum verſoriâ per ellipſem, vel circulum genitâ; ſed ipſarum curvarum indolem, & proprietates, quæ hujus loci non eſt enumerare, curioſius perſcrutanti magis magiſque innoteſcet. Certe ſi in verſoria* ADE *manente vertice* A *altera axis* fig. 191. *extremitas* B *in infinitum abeat verſoria ipſa in parabolam quadraticam vertetur, quod ſi extremitatem* B *ad alteras partes verticis* A *abire concipiatur, verſoria mutabitur in noſtram curvam* CM *præcedentis figuræ; at ſi manente extremitate axis* B *vertex verſoriæ* A *abeat in infinitum, verſoria ipſa evadet hyperbola meſolabica ſive ſecundi gradus, ad alteras vero partes tranſeunte vertice* A *habebitur noſtra curva* VX *præcedentis figuræ. quare idem hic evenit, ac in coniſectionibus, harum*

cur-

Digitized by Google

curvarum genitricibus, ſiquidem altero ellipſeos vertice in infinitum abeunte habebitur parabola, & alteras partes prætergrediente hyperbola.

Unam adhuc harum curvarum non ultimo loco habendam mechanicam proprietatem afferre placet. In hypotheſi quod gravitas corporum ad centrum aliquod tendentium ſit quadratis diſtantiarum a centro illo reciproce proportionalis, ſi corpus ex quiete in quolibet puncto Q *libere decidat ad centrum* C, *ſcala velocitatum (hoc eſt curva illa diametro* QC *deſcripta, cujus ordinatæ in quibuſlibet punctis* F, S, *repræſentent velocitates, quibus in iisdem punctis* F, S, *pollet corpus deſcendens) erit curva verſoria per circulum, vel ellipſem genita, cujus vertex* Q, *axis* QC; *ſcala vero temporum elementarium erit eadem verſoria ſed contrario modo poſita, cujus nempe vertex* C, *axis idem* CQ: *hæc demonſtrat idem Cl. P. Grandus in notis ad Galilei librum de motu accelerato prop.* III. *coroll.* VI. *& prop.* IV. *coroll.* V. *Unde infert tempora caſus per quaſlibet ſpatii partes* QS, QF *&c. proportionalia eſſe correſpondentibus ſegmentis ellipſeos, vel circuli genitoris verſoriæ; Verum ſi corpus non ex quiete in puncto* Q, *ſed cum aliqua celeritate ei in eo loco per impulſum, aut alio modo impreſſa deſcendere concipiatur, veluti nempe per aliquod ſpatium jam deſcendiſſet, quo deſcenſu celeritatem ei impreſſam acquireret; ſcalæ celeritatum, temporumque elementarium non eædem in eo caſu erunt verſoriæ; quare ſequenti conſtructione tunc erit pro ſolutione problematis procedendum. Supponatur corpus cum ea celeritate caſum ſuum incipere in puncto* Q, *quam acquireret ſi ex quiete in eodem puncto* Q *caderet per* QF, *inveniaturque quarta proportionalis poſt differentiam ipſarum* QF, FC, *ipſam* QF, *& diſtantiam* QC; *quæ quarta proportionalis, ſi quidem* QF *minor ſit ipſâ* CF, *verſus partes ſuperiores puta* Qd *accipienda erit, eritque punctum* d *ſublimitas, unde corpus ex quiete cadere debet ut acquirat in* Q *velocitatem æqualem ei, quam cadendo ex quiete in* Q *acquireret in* F; *& vertice* d, *axe* dC *deſcripta verſoria erit ſcala velocitatum; eadem vero contrario modo poſita, vertice nempe* C, *axe* Cd, *erit ſcala temporum elementarium &c. At ſi* QF *æquetur ipſi* FC, *tunc earum differentia æquabitur nihilo, & quarta illa proportio-* fig. 197.

 nalis

nalis erit infinita, quare ab infinita diſtantia cadere debet corpus ut acquirat in Q *eam celeritatem, quam acquireret per dimidiam* QC *cadendo ex quiete in* Q; *in quo caſu ſcala celeritatum erit hyperbola ſecundi gradus inter aſymptotos* CQ, CG, *cujus nempe abſciſſæ* CF, CQ *ſint in duplicata reciproca ratione ordinatarum, ejusque curva reciproca (nempe parabola vertice* C, *axe* CQ *deſcripta) erit ſcala temporum elementarium &c. Quod ſi demum* QF *major ſit ipsâ* CF; *quarta illa proportionalis ad partes inferiores, puta* QD, *accipienda erit, & in hoc caſu noſtra curva* VX, *per hyperbolam cujus transverſa diameter* CD *genita, erit ſcala velocitatum, ejusque reciproca* CML *ſcala temporum elementarium; tempusque per quamlibet* FC *erit proportionale ſpatio* CFM, *coordinatis* CF, FM, *curvaquæ* CM *comprehenſo, ſive ſpatio hyperbolico* CN *ejus ſubquadruplo.*

Si curva CN *(quæ hactenus fuit hyperbola) ſit parabola Apolloniana, latere recto quadruplo* CD *deſcripta, ſiatque ut tangens* NT, *ad ſubtangentem* FT, *ita data quædam recta linea* CE *ad quartam* FM, *hæc applicata ad eamdem abſciſſam* CF, *dabit noſtram curvam* CM; *item ſi fiat ut ſubtangens* FT, *ad tangentem* NT, *ita conſtans* CE *ad quartam* FV, *hæc ad eamdem abſciſſam* CF *applicata dabit aliam curvam* VX. *Hactenus de hac re, de qua pro inſtituto noſtro ſatis dictum arbitror, quamvis occaſio eſſet longius de ea ſermonem trahere, nonnullaque alia diſſerere cognitione profecto digniſſima; danda enim opera eſt, ut cum ad alia ſæpius aberrarit ad reliquas propoſiti partes tandem revocetur oratio. Sequitur porro, ut ex lemmate tertio quemadmodum theorema de minimæ curvæ ſuperficiei cono ſphæræ circumſcripto inferatur ſequenti epichaeremate demonſtremus.*

fig.191. *XXVIII. Sit circulus* ANB *cujus centrum* O, *diameter* AB, *in qua ſumatur* Ap *æqualis lateri quadrati circulo inſcripti, ordineturque* pn, *ſicuti ex quolibet alio puncto* P *alia quælibet* PN, *& in* n, N *tangant rectæ* sng, qNf *a tangente in* A, *& diametro* AB *producta terminatæ, quæ circa axem* AB *revolutæ generent ſuperficies conicas ſphæræ* ANB *circumſcriptas: Dico conicam ſuperficiem genitam ab* sng *tangente in* n *minimam omnium eſſe, minorem nempe quam genita a*

tan-

tangente q N f. *Siquidem quoniam* A p *eſt latus quadrati circulo inſcripti, erunt tres* B A, p A, O A *continue proportionales; quare per lemma tertium* B p ⋈ p O : A p *majus eſt quam* B P ⋈ P O : A P, *&* *ratio* B p : A p *ad* B P : A P *major erit ratione ipſius* P O *ad* O p; *atqui ob tangentes* S B T, q N F, *eſt* B p : A p *ad* B P : A P *ut* B T : A S *ad* B t : A q, *ſive (quod facile colligitur ex* 42. III. *Conic.) ut* A q² *ad* A S², *item* O P, *ad* O p, *eſt ut* O g *ad* O f; *ergo ratio ipſius* A q² *ad* A S² *major eſt ratione* O g *ad* O f; *hæc autem ratio componitur ex rationibus* O g *ad* O A, *&* O A *ad* O f, *ſive (per* 3. *ſexti elem.) ex rationibus* s g *ad* S A, *&* A q *ad* q f, *quæ componunt rationem rectanguli* s g ⋈ A q *ad* S A ⋈ q f; *quare ratio ipſius* A q² *ad* A S² *major eſt ratione* s g ⋈ A q *ad* S A ⋈ q f, *ſive ratio* A q *ad* A S *major ratione* s g *ad* q f, *&* *productum extremorum, nempe rectangulum* A q f *majus producto mediorum hoc eſt rectangulo* A s g; *ac proinde ſuperficies conica per rectam* f q *genita (quæ per* XVII. *lib.* I. *de ſph. & cyl. eſt primo rectangulo proportionalis) major erit ſuperficie conicâ genitâ a recta* s g *(ſecundo rectangulo proportionali), quæ proinde erit omnium ſimilium minima* Q. E. D.

Verum ſi omnium eidem ſphæræ circumſcriptorum conorum is quæratur qui minimam habeat ſuperficiem accepta etiam baſi, conveniet hic cum minimo cono, de quo diximus num. XX. *Siquidem conus quilibet circa ſphæram deſcriptus eſt ad ſphæram, ut coni ipſius univerſa ſuperficies accepta etiam baſi ad ſuperficiem ſphæræ, ut demonſtravit Clariſs. Torricellius prop.* 2. *lib.* 2. *de ſph. & ſol. ſph.*

XXIX. *Demum ſi datæ ſphæræ circumſcribantur conoides parabolici geniti a parabolis ordinariis, quæraturque conoides minimæ curvæ ſuperficiei; applicando methodum expoſitam num.* XXV. *devenietur ad æquationem quinque dimentionum facile conſtruendam per interſectionem alicujus ex coniſectionibus, & alterius lineæ tertii ordinis, modo æquatio illa ad inferiorem gradum reduci nequeat, ut mihi eam de ſumma facie ſpectanti viſum eſt. Sed quoniam hoc eſt principale problema abs te Vir Clariſs. propoſitum, non pigebit paullo fuſius ea hic perſequi quæ ad ejus analyſim pertinent, quæ enim ſyntheſim ſpectant egregie ab te, Vir acutiſſime, perfecta ſcio, quod poſtremo loco inter ingenii*

tui

Digitized by Google

tui ſummas laudes haud eſt utique ponendum. Et primo quidem dimetiendam duximus ſuperficiem conoidis parabolici geniti a parabola Apolloniana, quod analytice hic præſtabimus methodo diverſa ab ea, quam univerſaliter de qualibet ſuperficie dedi-
fig. 196. *mus num.* XXIV. *Sit ergo parabola* DPB, *ordinatæque infinite proxime* DB, db, *&* Ed *parallela ad* BP, *ponaturque* BP $= x$, ED $= y$, *parameter parabolæ* $= a$, *ejus æquatio erit* $yy = ax$, *radius circuli, cujus peripheria* $= p$, *dicatur* r; Bb $=$ Ed $= dx$; *circuli, cujus radius* BD, *peripheria erit* $= py : r$, *&* *ſuperficies cylindrica infinite parva deſcripta a lineola* Ed *circa* Bb *revoluta, erit* $= pydx : r$; *hæc autem eſt ad ſuperficiem* Dd *infinite parvam conoidis parabolici, ut* Ed *ad* Dd, *ſive* :: BQ : QD :: $2x : V(4xx + yy)$, *ergo ſuperficies illa* Dd *infinite parva erit* $= pydxV(4xx + yy) : 2rx =$ (*poſito pro* yy *ejus valore* ax) $pdxV(4ax + aa) : 2r$, *cujus integrale* $= pV(4ax + aa)^3 : 12ra$, *cui æquari deberet ſuperficies conoidis parabolici; at facto* $x = 0$, *dicta ſuperficies pariter* $= 0$, *cum tamen in illo integrali adhuc remaneat quantitas* $pa^3 : 12ra$, *quæ proinde ex illo ſubtrahi debet, itaut vera ſuperficici conoidis parabolici dimentio ſit* $(pV(4ax + aa)^3 - pa^3) : 12ra$; *hoc eſt, ductâ normali* DF *ad punctum* D, *ſuperficies curva conoidis parabolici* DP *æquatur ſuperficiei cylindri, cujus baſeos radius ſit normalis* DF, *altitudo vero* $\frac{1}{3}$ FQ, *minus* $\frac{1}{6}$ *circuli, cujus radius æquetur parametro: eſtque dicta ſuperficies ad circulum ſuæ baſeos ut* $(pV(4ax + aa)^3 - pa^3) : 12ra$ *ad* $pax : 2r$, *ſive ut* $V(ax + \frac{1}{4}aa)^3 - \frac{1}{8}a^3$ *ad* $\frac{1}{4}aax$, *hoc eſt ut cubus* DF *minus cubo* BF *ad ſeſquialteram producti ex quadrato* DB *in* BF. *Eâdem methodo dimetientur curvæ ſuperficies conoidales genitæ a parabolis altioris, vel inferioris gradus, imo a qualibet curva circa axem aliquem revoluta; modo emergentes differentiales integrari poſſint.*

Hoc poſito quoniam curva ſuperficies conoidis parabolici PD *æquatur* $(pV(4ax + aa)^3 - pa^3) : 12ar$, *erit dicta ſuperficies proportionalis quantitati* $(V(ax + \frac{1}{4}aa)^3 - \frac{1}{8}a^3) : \frac{1}{2}a$, *hoc eſt proportionalis differentiæ cuborum normalis* DF, *&* *ſemiparametri* FB, *ad ipſum* FB *applicatæ. Cum ergo num.* XII. *demonſtratum ſit, ſemibaſem* BD [fig. 185.] *parabolæ*

AEB

AEB *circulo circumſcriptæ æquari abſciſſæ* DF, *ſemiparametrum vero eſſe æqualem abſciſſæ a centro* CF; *hinc fit, quod ſi a centro* C *inclinetur ad axem* CQ *recta* CV *in angulo ſemirecto* QCV, *productaque* EF *in* V, *jungatur* DV, *erit ſuperficies conoidis* AEB *ſphæræ circumſcripti proportionalis quantitati* $(DV^3 - VF^3) : VF$; *eo igitur deducitur problema de conoide minimæ curvæ ſuperficiei* AEB *datæ ſphæræ circumſcribendo, ut ductâ illâ* CV *a medio puncto* C *datæ rectæ* QD *in angulo ſemirecto* QCV, *& ab ejus quolibet puncto* V *ductâ* DV *ad extremitatem* D *datæ rectæ* DQ, *ac ei demiſſâ perpendiculari* FV, *inveniatur* $(DV^3 - VF^3) : VF$ *minima quantitas. devenietur autem ad æquationem quinque dimenſionum, ut ſupra innuimus.*

Si ab axis DQ *extremitate altera* Q *ducatur tangens* QK, *quæraturque maxima curva ſuperficies genita ab arcu parabolico* BEK *ordinatis* DB, QK *intercepto, & circa axem* DQ *revolato; eodem modo oſtendetur, problema eo reduci, ut (poſitâ ſuperiori conſtructione, & junctâ inſuper* QV) *inveniatur minima quantitas* $(DV^3 - QV^3) : FV$; *ſiquidem num.* XII. *demonſtravimus non ſolum* $DB = DF$, *ſed etiam* $QK = QF$; *invenio autem, ſumendam eſſe* $CF = \frac{1}{2} CQ \sqrt{\frac{1}{6}}$. *Aliis ſuperficiebus conoidalibus eadem analyſis applicari poteſt, quod quidem, ſi prolixum improbumque ſupputandi laborem excipias, facile fieri poterit; at nobis diutius in hiſce immorari non licet.*

XXX. En igitur, Vir Clariſs., pro ingenii noſtri tenuitate ſi non aſſecuti, at id, te hortante maxime, conati quidem ſumus, ut ea tibi amicorum optimo atque doctiſſimo hac epiſtola de problemate tuo explicaremus, quæ nobis examinanda propoſuimus (nec enim omnia perſequi animus erat, quæ in hoc particularium problematum genere quæri poſſunt) quamquam & hæc eadem, & alia pleraque multo fortaſſe præclariora ab aliis in hac quidem palæſtra exercitatioribus gravius, ſplendidius, uberius tractari poſſe non inficior. Interim diligentiſſime te rogatum velim, ut communicare mecum digneris tuam illam exercitationem geometricam, cujus apud Doctiſſimum, mihique nunquam ſine laude nominandum Antonium M. Salvinium ſatis amplum argumentum legi, complectebatur

ſiqui-

ſiquidem ſectionum conicarum, ac ſolidorum ab ipſis circa axes ſuos revolutis genitorum dimentiones; cujuſcumque pariter corporis a qualibet ſectione conica, vel cylindrica circa ſuum axem revoluta geniti, fruſtrique cujuſlibet ab ipſo reſecti centrum gravitatis unica propoſitione univerſaliſſime demonſtratum; rationem denique quam habent eadem corpora ad cylindros circumpſcriptos, quamque habent pondera eorumdem corporum ad extremitatem ſuorum axium centraliter appenſorum in altera axis extremitate exiſtente fulcro duabus pariter generaliſſimis propoſitionibus inventam. Humanitas tua, & amor quo me proſequeris ſperare me jubet; te ſatis deſiderio meo facturum; quinimmo nec deſpero alia tua opera geometrica (quod maxime optem) me aliquando viſurum; nec enim me fugit exercitationem ſupradictam primam eſſe ex ſex tuis exercitationibus, in quibus exoticarum curvarum proprietates perſcrutaris; compertum etiam mihi eſt ſectionum ccnicarum doctrinam duodecim libris a te comprehenſam eſſe ne dicam exhauſtam; ſcio denique adverſaria tua abundare problematibus, aliiſque geometricis ſchedis, nec numero paucis, nec rebus tractatis inelegantibus; in te enim optime quadrat Horatianum illud — Qui nil moliris inepte — Sed jam plus æquo Epiſtolæ modum prætergreſſus ſum; vale Vir Præſtantiſſime, & ſcito me tuæ probitatis, ac doctrioæ laudatorem cultoremque perpetuum fore. Florentiæ ex Monaſterio S. Michaelis Vicedominorum Kal. April. an. MDCCXIX.

EXER-

Digitized by Google

EXERCITATIO GEOMETRICA.

SUPPOSITIO I.

Datis pluribus lineis AB. *ab*, quarum unaquæque in aliquo jaceat plano, ſi ab ipſarum centris gravitatis agantur rectæ HG. *hg* normales, aut ſimiliter inclinatæ ad totidem rectas CD. *cd*, quæ in prædictis planis reſpective reperiantur, dataſque lineas AB. *ab* non diſpeſcant, & per integras eorumdem planorum revolutiones circa ipſas rectas CD. *cd*, tamquam circa axes, efficiantur rotundæ ſuperficies, aut planæ, aut curvæ ab iiſdem datis lineis AB. *ab*; ſequentes ſuppono concluſiones jam ab aliis oſtenſas. (*fig.* 1.)

I.

Proportio ſuperficiei genitæ per lineam AB ad ſuperficiem procreatam a linea *ab* componetur ex ratione lineæ AB ad lineam *ab*, & ex ratione diſtantiæ HG ad diſtantiam *hg*.

II.

Linea AB ad lineam *ab* ſe habebit in proportione compoſita

ex ratione illius ad hanc ſuperficiem, & ex ratione, quam reciproce habet diſtantia *bg* ad diſtantiam HG.

III.

Diſtantiæ HG proportio ad diſtantiam *bg* compoſita erit ex ratione prioris ad poſteriorem ſuperficiem, & ex ratione in qua eſt reciproce linea *ab* ad lineam AB.

IV.

Et ubi inter ſe adæquentur prædictæ ſuperficies, linea AB ad lineam *ab* erit reciproce, ut diſtantia *gb* ad diſtantiam GH: & converſim.

V.

fig. 2. 3. Si datæ lineæ AB. *ab* ſint rectæ, & amplius ſint partes rectarum HG. *hg*: ſuperficies genita per rectam AB ad ſuperficiem progenitam a recta *ab* eamdem habebit proportionem, quam differentia quadratorum AG. BG ad quadratorum *ag* *bg* differentiam. Et

VI.

Amplius ſi ipſæ rectæ AB. *ab* rectis AG. *ag* ſint proportionales, prædictæ ſuperficies genitæ ab illis AB. *ab*, tam quadratis AG. *ag*, quam quadratis HG. *bg*, quadratiſque AB. *ab* proportionabuntur. Et

VII.

fig. 4. Si recta AB alterum terminum habeat in ſuo revolutionis axe CD, recta vero *ab* ſuo revolutionis axi *cd* æquidiſtet, ſuperficies deſcripta per illam AB ad ſuperficiem genitam ab hac recta *ab* erit ut q: AB ad duplum rect=li *ab*, *bg*.

VIII.

fig. 5. Si iterum datæ lineæ AB. *ab* rectæ ſint, & altera AB cum ſuo revolutionis axe CD conveniat in G, reliqua vero *ab* ad ſuum

Digitized by Google

ad ſuum revolutionis axem *c d* ſit parallela, ſuperficies genita per priorem rectam AB ad ſuperficiem deſcriptam per poſteriorem *a b*, ſe habebit, ut quadratorum AG. BG differentia ad duplum rect=lum *a b*. *g b*.

IX.

Præterea ſi prædictis axibus CD. *c d* datarum linearum AB. *a b*, & in earumdem planis, æquidiſtent rectæ ONP, *o n p*, quæ rectis HG. *h g* occurrant in N. *n*, at ipſasmet rectas AB. *a b* non dividant

Supradicta ſuperficies, circa axim CD genita per lineam AB ſe habebit ad ſummam, *in fig.* 1. *&* 3. & ad differentiam, *in fig.* 2. *&* 4. ſuperficierum, circa axes *c d*, *o p* deſcriptarum a linea *a b*, in prop=ne compoſita ex ratione lineæ AB ad lineam *a b*, & ex ratione diſtantiæ HG ad diſtantiam *n g*, &

X.

Summa, *in fig.* 1. ac differentia, *in fig.* 2. *&* 4. ſuperficierum circa axes CD. OP genitarum a linea AB, ad ſummam quidem, aut differentiam ſuperficierum, circa axes *c d*, *o p* procreatarum, erit in proportione compoſita ex ratione lineæ AB ad lineam *a b*, & ex ratione rectæ GN ad rectam *g n*. &

XI.

Proportio, in qua eſt differentia ſuperficierum deſcriptarum circa axes CD. NP per lineam AB ad ſummam ſuperficierum, circa axes *c d*. *n p*. progenitarum a linea *b a*, componetur ex ratione lineæ AB ad lineam *a b*, & ex ratione diſtantiæ NG ad diſtantiam *n g*. *fig.* 3.

SUPPOSITIO II.

Datis pluribus areis ABCD. *a b c d*: ſi ab ipſarum centris gravitatis H, *h* agantur rectæ HG. *h g* normales, aut ſimiliter inclinatæ ad totidem rectas EF. *e f*, quæ in planis ea- *fig.* 6.

Digitized by Google

rumdem arearum reſpective jaceant, ipſaſque areas non ſecent; & per integras ipſarum arearum revolutiones circa rectas E F. *e f*, tamquam circa axes efficiantur ſolida rotunda, aut armillaria ab ipſismet areis; ſequentes ſuppono concluſiones, jam ab aliis oſtenſas.

I.

Proportio, quam habet ſolidum factum circa axim EF ab area ABCD ad ſolidum genitum circa axim *e f* ab area *a b c d* componetur ex ratione illius ABCD ad hanc aream *a b c d*, & ex ratione diſtantiæ HG ad diſtantiam *b g*.

II.

Area ABCD ab aream *a b c d* ſe habebit in prop=ne compoſita ex ratione prioris ad poſterius ſolidum, & ex ratione, quam reciproce habet diſtantia *b g* ad diſtantiam HG.

III.

Diſtantia HG ad diſtantiam *b g* erit in prop=ne compoſita ex ratione primi ad ſecundum ſolidum, & ex ratione, quam habet reciproce poſterior area *a b c d* ad priorem ABCD.

IV.

Et ubi prædicta ſolida inter ſe ſint æqualia, altera area ABCD ad reliquam *a b c d* erit reciproce, ut diſtantia *b g* ad diſtantiam HG: Et converſum.

V.

Si altera *a b c d* ex datis areis ſit parall=mum, cujus (fig. 2. 3.) duo latera oppoſita *a b* . *c d* rectæ *e f* æquidiſtent, ac reliqua latera oppoſita *a d* . *b c* diſtantiæ *b g* ſint parallela: ſolidum deſcriptum circa axem EF ab area ABCD, ad ſolidum procreatum circa axem *e f* ab area *abcd*, ſe habebit in proportione compoſita ex ratione areæ ABCD ad parall=mum *abcd*, & ex ratione, quam habet 2HG ad *a i* + *d i*

Si

VI.

Si prædictis axibus, & in planis datarum arearum ABCD. *abcd* æquidiſtent rectæ ONP. *onp*, quæ rectis HG. *hg* occurrant in N. *n*, at ipſas areas haud ſecent.

Summa *in fig.* 1. differentia vero, *in fig.* 2. *&* 3. ſolidorum, circa rectas EF, OP deſcriptorum ab area ABCD ſe habebit ad ſolidum genitum circa axem *ef* ab area *abcd*, in proportione compoſita ex ratione illius ABCD ad hanc aream *abcd*, & ex ratione diſtantiæ GN ad diſtantiam *gh*. Atque

VII.

Prædicta ſumma, aut differentia ſolidorum, circa rectas EF. OP genitorum ab area ABCD erit ad ſummam, *in fig.* 1. 3. & ad differentiam *in fig.* 2. ſolidorum, circa rectas *ef*. *op* procreatorum ab area *abcd*, in proportione compoſita ex ratione areæ ABCD ad aream *abcd*, & ex ratione diſtantiæ GN ad diſtantiam *gn*.

THEOREMA I. Propoſitio I.

Datis duabus areis AFHBC. NEOBC, *ad eamdem diametrum* BC *ſe ſimiliter referentibus, & ita ut unaquaque ordinata* FT, *in altera area* AFHBC, *ad homologam ordinatam* TE, *in reliqua area* NEOBC, *ſit ut conſtans recta* BZ *ad reſpectivam partem* TB *ipſius diametri;* fig. 9.

I. Prima area AFHBC *ſe habebit ad ſecundam* NEOBC *ut prædicta conſtans recta* BZ *ad ordinatæ* BM *intervallum a centro gravitatis illius areæ* AFHBC. *Et prioris areæ ſegmentum* fttf *comprehenſum inter duas quaſcumque ordinatas* ft, ft, *erit ad homologum poſterioris areæ ſegmentum* ette *ut ipſamet recta* BZ *ad ordinatæ* BM *diſtantiam a centro gravitatis illius ſegmenti* fttf. *Et*

II. Solidum, circa ordinatam BM *deſcriptum a prima area* AFHBC *ad ſolidum ſimiliter genitum a ſecunda area* NEOBC, *ſe habebit, ut prædicta conſtans recta* BZ *ad ordinatæ* BM *inter-*

vallum

Digitized by Google

vallum a centro gravitatis hujus areæ N E O B C*: atque ſolidum deſcriptum quidem circa ordinatam* B M *a prioris areæ ſegmento, inter duas quaſcumque ordinatas* f t . f t *comprehenſo, ad ſolidum ſimili modo progenitum ab homologo poſterioris areæ ſegmento* e t t e, *erit ut ipſamet recta* B Z *ad ordinatæ* B M *diſtantiam a centro gravitatis hujus ſegmenti* e t t e. Dummodo prædictæ ordinatæ B M intervalla a centris gravitatis, diametro communi C B parallela perpetuo intelligantur.

Ex hypotheſi, *ft* ad *te* eſt ubique ut Z B ad *t* B; ideoque rect=lum *ft* B rect=lo *te*. B Z, ſuperficieſque, circa rectam

(1) *ex n.* B M deſcriptam per ordinatam *ft* (1) æquatur differentiæ ſuper-
9. *ſup.* 1. ficierum progenitarum circa ordinatas B M . Z L ab ordinata *te*: unde ſolidum, circa B M genitum ab area A F H B C, (vel ab ipſius ſegmento *fttf*) differentiæ ſolidorum, circa rectas B M . Z L deſcriptorum ab area N E O B C (vel ipſius reſpectivo ſegmento *ette*) æquiparabitur; & per conſequens area A F H B C ad aream

(2) *ex n.* N E O B C (2) erit ut recta Z B ad rectæ B M intervallum a centro
6 *ſupp.* 2. gravitatis illius areæ A F H B C: atque ſegmentum *fttf* erit ad ſegmentum *ette* (2) ut recta B Z ad ipſius B M diſtantiam a centro gravitatis illius ſegmenti *fttf*.

Præterea proportio ſolidi geniti circa B M ab area A F H B C, ad ſolidum ſimiliter progenitum ab area N E O B C; quæ componi-

(3) *ex n.* tur (3) ex ratione areæ A F H B C ad aream N E O B C (nempe ratione
1. *ſupp.* 2. rectæ B Z ad rectæ B M intervallum a centro gravitatis illius areæ) & ex ratione hujus intervalli ad ipſius B M diſtantiam a centro gravitatis areæ N E O B C; æquari debet rationi, quam habet Z B ad hanc diſtantiam.

Pariterque proportio ſolidi, circa B M deſcripti ab area *fttf* ad ſolidum ſimiliter procreatum ab area *ette*; quæ componitur ex ratione illius *fttf* ad hanc aream *ette* (ſcilicet ratione rectæ Z B ad rectæ B M intervallum a centro gravitatis prioris areæ *fttf*) & ex ratione hujus intervalli ad ipſius B M diſtantiam a centro gravitatis poſterioris areæ *ette*; conſimilis erit rationi, in qua eſt Z B ad hanc diſtantiam, quare, &c.

COROLLARIUM.

I. Unde eſt, quod area A F H B C ad ſummam ambarum A F H B C. N E O B C

NEOBC ſe habebit ut ipſa conſtans recta BZ, ad aggregatum ejuſdem BZ, ac diſtantiæ, qua ordinata BM longe eſt a centro gravitatis illius areæ AFHBC; nempe ad intervallum hujus centri ab ordinata ZL.

II. Et pariter area $fttf$ ad ipſam cum homologa $ette$ erit ut ipſa recta ZB, ad eamdem ZB, cum intervallo ordinatæ BM a centro gravitatis illius areæ $fttf$, ſcilicet ad hujus centri diſtantiam ab ordinata ZL.

III. Area AFHBC erit ad ipſius differentiam ab area NEOBC, ut prædicta recta BZ ad ipſius differentiam ab intervallo ordinatæ BM a centro gravitatis illius areæ AFHBC.

IV. Et pariter area $fttf$, ad ipſius differentiam ab homologa $ette$, erit ut ipſa recta BZ, ad ejuſdem differentiam ab intervallo ordinatæ BM, a centro gravitatis illius areæ $fttf$.

V. Solidum, circa ordinatam BM deſcriptum ab area AFHBC, erit ad ipſum una cum ſolido ſimiliter procreato per aream NEOBC, ut ſupradicta recta BZ, ad eamdem cum ordinatæ BM intervallo a centro gravitatis hujus areæ NEOBC.

VI. Solidumque, circa ordinatam BM genitum ab area $fttf$, ad ipſum cum ſolido ſimiliter progenito ab homologa area $ette$, erit ut prædicta recta BZ, ad eamdem cum ordinatæ BM diſtantia a centro gravitatis hujus areæ $ette$.

VII. Solidum, circa ordinatam BM genitum ab area AFHBC, ſe habebit ad ipſius differentiam a ſolido ſimiliter creato per aream NEOBC, ut prædicta recta BZ, ad ejuſdem differentiam ab intervallo ordinatæ BM a centro gravitatis hujus areæ NEOBC.

VIII. Et pariter ſolidum genitum circa ordinatam BM ab area $fttf$, ad ipſius differentiam a ſolido ſimiliter facto per aream homologam $ette$, erit ut ipſa recta BZ, ad ejuſdem differentiam a diſtantia, qua ordinata BM recedit a centro gravitatis hujus areæ $ette$.

SCHOLIUM I.

Si a puncto B ad terminum E alterius ordinatæ TE in ſecunda area NEOBC procedat ramus BE, qui protractus occurrat in aliquod punctum (puta L) cum ordinata ZL, compleaturque parall=mum ZLMB per rectam LMd, diametro CB parallelam, quæ producta, tranſibit per terminum F homologæ ordinatæ

natæ T F in prima area AFHBC; quandoquidem (ob hypotheſim) relatio FT . TE ſimilis eſt rationi ZB . BT, vel LB . BE.

Area *f d* F clauſa inter duas quaſcumque ordinatas FT . *ft* a curva AFH, & a recta LMF, erit ad aream *e g* E inter ipſas ordinatas clauſam a linea NEO, & a recta BE, ut ſupradicta conſtans recta BZ, ad ordinatæ BM intervallum a centro gravitatis illius areæ *f d* F.

Atque ſolidum genitum circa ordinatam BM a priori area *f d* F, ad ſolidum ſimiliter procreatum a poſteriori area *e g* E, ſe habebit ut prædicta recta BZ, ad intervallum ordinatæ BM a centro gravitatis hujus areæ *e g* E.

Nam rationi *dt* . *gt*, ſeu ZB . B*t* ſimilis eſt (ob hypotheſim) relatio *ft* . *te*, ideoque etiam relatio *df* . *ge* ubique, ac propterea per præcedentem Propoſitionem patet propoſitum.

SCHOLIUM II.

Solidum, circa ordinatam BM, deſcriptum a parall=mo MBZL, erit ad ſolida ſimiliter genita ab areis AFHBC . *fttf*. F *df* ut ipſius parall=mi dimidium ad reſpectivas areas NEOBC. *ette* . E*ge*.

Ordinando in parall=mo MZ quamcumque rectam QPV, lateri BM parallelam, proportio VQ . QP æquabitur ubique rationi ZB . BQ; rect=lumque VQB rect=lo PQ, BZ, ſuperficieſque circa BM, genita per rectam VQ, duabus ſimul ſuperficiebus, circa rectas BM, ZL deſcriptis a recta PQ, æquiparatur (1), unde ſolidum a parall=mo MZ procreatum circa rectam BM æquabitur duobus ſimul ſolidis genitis circa rectas BM . ZL a tri=lo BZL. Atqui ſolidum, circa BM factum ab area AFHBC, vel ab area *fttf*, vel ab area F *df*, æquatur differentiæ ſolidorum, circa rectas BM . ZL deſcriptorum a reſpectiva area NEOBC, ſeu *ette*, ſeu E*ge*. Proportiones igitur, quas habet ipſum ſolidum parallelogrammi MZ ad ſolida arearum AFHBC . *fttf*. F*df* ſimiles erunt rationibus, quas habet ſumma prædictorum ſolidorum tri=li BZL, ad reſpectivas differentias ſolidorum, circa rectas BM . ZL deſcriptorum a reſpectivis areis NEOBC. *ette* . E*ge*, vel potius (2) rationibus, quas reſpective habet tri=lum LZB ad ipſas areas NEOBC . *ette* . E*ge*.

(1) *num.* 9. *ſupp.* 1.

(2) *num.* 6. *ſupp.* 2.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLIUM III.

Et hinc facile innoteſcit, quod ſolidum, circa ordinatam BM deſcriptum ab area AFHBC, ſe habebit ad ſolida ſimiliter genita ab areis *ft tf*. F *df* ut area NEOBC, ad reſpectivas areas *ette*. E *ge*.

SCHOLIUM IV.

Si datæ areæ AKHBC, ad diametrum CB comparatæ, centrum gravitatis ſit in ordinata KIP: aſſignari poterunt innumeræ curvæ QEPB. GUPR &c. incidentes in extremas ordinatas CAL. BHM, & ſe mutuo ſecantes in aliquo puncto illius ordinatæ KIP, claudenteſque cum ipſa diametro CB totidem areas QEPOBC. GVPRBC &c. inter ſe æquales, & quæ ſe habeant ad datam aream AKHBC in quacunque data relatione R. S. fig. 10.

Producta diametro CB utcunque in N, rationi R. S conſimiles fiant correlationes IB. BZ; IN. N*y*; IP. IK: & cunctæ ordinatæ FT protrahantur ita in E, & in V, ut ET ad TF ſit ubique ut abſciſſa TB ad BZ, & ſimiliter VT ad TF ſe habeat ubique ut abſciſſa TN ad N*y*; quatenus curva QEPOB tranſiens per P, & per omnia puncta EO, incidat in ordinatas CL, BM, claudetque cum diametro CB aream QEPOBC, quæ (per præcedentem propoſitionem) ſe habebit ad aream AKHBC ut diſtantia IB ad BZ, vel ut R ad S: & pariter curva GVP*u*R ducta per punctum P, & per omnia puncta V*u* claudet cum diametro CB aream GVP*u*RBC, quæ ſe habebit ad aream AKHBC ut diſtantia IN ad N*y*, vel ut R ad S, ſive ut area QEPOBC ad ipſam AKHBC: ac propterea inter ſe æquabuntur areæ QEPOBC. GVP*u*RBC &c.

SCHOLIUM V.

Præterea ſi datæ areæ KHBI diameter IB producatur uſque ad rectam LC parallelam ordinatis, ita ut CB dupla ſit ipſius IB: Aſſignari poterunt innumeræ curvæ QEPOBC. GVP*u*RBC &c. quæ incidant in parallelas LC. BM, & ſe mutuo ſecent in aliquo puncto ordinatæ KI, claudantque cum recta CB totidem areas

QEPOBC . GVPuRBC &c. inter ſe æquales, ſeque habentes ad ipſam aream KHBI in quacumque data ratione R . S.

Si cum baſe IK deſcribatur area KACI ſe referens ad diametrum CI, areæque KHBI æqualiter analoga, ſcilicet ut ubique inter ſe adæquentur ordinatæ TF . tf, æqualiter recedentes a communi baſe KI, ipſarum arearum, orietur area AKHBC dupla datæ KHBI, & cujus centrum gravitatis erit in recta IK. Rebuſque ſic ſtantibus aſſignari poterunt innumeræ curvæ QEPOB . GVPuR incidentes in ordinatas CL . BM, ſe mutuo ſecantes in aliquo puncto ordinatæ KIP, & quæ claudant cum diametro CB totidem areas QEPOBC . GVPuRBC &c ſe habentes ad aream AKHBC in ratione R . 2S, adeoque ad aream KHBI in data ratione R . S, demumque inter ſe ſint æquales &c.

THEOREMA II. Propoſitio 2.

fig. 11. *&* 12. *SI integræ parabolæ diametrum* ETO *procedens per verticem* E *alicujus tri=li* ZEB, *ab ipſa parabola circumſcripti, conveniat in aliquod puncto* T *cum ejuſdem trianguli baſe* ZB, *vel cum ipſa producta.*

Parabolicum bilineum ZCB *erit ad tri=lum* ZEB *ut* q: ZB *ad triplum rect=li* ZTB.

Ab altera baſis ZB extremitate B agatur parabolæ diameter BGH, ad quam ordinentur rectæ ZH . EG.

Et cum ſemiparabolæ ZCBH . ECBG ſint proportionaliter analogæ, proindeque tri=lis ZBH . EBG, bilineiſque ZCB . ECB proportionales; proportio bilinei ZCB ad bilineum ECB ſimilis erit rationi tri=li ZBH ad tri=lum EBG, componeturque ex ratione ZH . EG; & ex ratione HB . GB, vel (ob parabolæ diametrum BGH) ratione q: ZH ad q: EG; & æquabitur rationi cubi ZH ad cubum GE, ſeu ad cubum OH; vel potius rationi cubi ZB ad cubum BT.

Similiter reperietur bilineum ZCB ſe habere ad bilineum EVZ, ut cubus ZB ad cubum ZT; quapropter proportio bilinei ZCB ad ſummam (*in fig.* 11.) & ad differentiam (*in fig.* 12.) bilineorum ECB . ZVE, ſimilis erit rationi cubi ZB, ad ſummam reſpective, aut differentiam cuborum ZT . TB: & comparando antece-

Digitized by Google

tecedentes ad terminorum differentias, bilineum ZCB ad tri=lum ZEB erit ut cubus ZB ad triplum parall=di ſub ZB in rect=lum ZTB, nempe ut q: ZB ad triplum rect=li ZTB quod &c.

COROLLARIUM.

Si prædicta diameter BT integræ parabolæ ſit quidem diameter parabolici bilinei ZCB, proportio ipſius bilinei ZCB ad tri=lum ZBR (quæ æquiparatur rationi quadrati ZB ad triplum rect=li ZTB) erit ſeſquitertia. *fig. 11.*

THEOREMA III. Propoſitio 3.

SI integræ parabolæ diameter RT *procedens per verticem* E *alicujus tri=li* ZEB, *ab ipſa parabola circumſcripti, conveniat cum ejuſdem trianguli baſe* ZB, *in aliquod punctum* T, *vel cum ipſa baſe producta.* *fig. 13. & 14.*

Parabolicum bilineum ZVB *ſe babebit ad triangulum* ZEB *ut* q: *baſis* ZB *ad triplum rect=li* BTZ *ex ipſius baſis ſegmentis; & ſe babebit ad parabolicum trilineum* ZAET *ut cubus* ZB *ad parall=dum quadrati* ZT *in* ZB *cum duplo ſegmenti* TB.

Ducatur recta NFZ parabolam contingens in puncto Z, & cum diametro TE, diametriſque NB . XV*y* . *tef* conveniens in F . N . *y* , *f*, quarum altera XV*y* ſit diameter etiam bilinei ZVB.

Et quia X*y* ad XZ (vel rect=lum *y*XB ad rect=lum ZXB) eſt ut *ft* ad *t*Z, ſive ut rect=lum *ft*B ad rect=lum Z*t*B, permutando, erit rect=lum *y*XB ad rect=lum *ft*B ut rect=lum ZXB ad rect=lum Z*t*B, vel (ob parabolam) ut VX ad *te*, vel ut VX in ZB ad *te* in ZB; atqui rect=lum *y*XB æquatur recto VX, ZB; quandoquidem tam relatio *y*X . VX, quam relatio ZB . XB dupla eſt; rect=lum igitur *ft*B rect=lo *te*, ZB erit quidem æquale; ac propterea *ft* ad *te* erit ubique, ut conſtans recta ZB ad reſpectivam abſciſſam *t*B: atque area ZVB ad aream ZNB (1) erit ut ipſius BN intervallum a centro gravitatis areæ (nempe tri=li) ZNB ad rectam ZB, vel potius (2) ut tertia pars ipſius ZB ad ZB, vel ut ZB ad 3ZB. ſed tri=lum ZNB ſe habet ad tri=lum ZEB ut NB ad ET, (3) ſcilicet in proportio-

(1) *per prop. 1.*
(2) *ex Archimed. de æquepond. lib. 1. prop. XIV.*
(3) *elem. VI. prop. 1.*

ne compoſita ex ratione NB . FT , ſeu 3 ZB . 3 ZT , & ex ratione FT . TE; ſeu ZB . BT; Patet igitur proportionem bilinei ZVB ad tri=lum ZEB compoſitam eſſe ex rationibus ZB . 3 ZB; 3 ZB . 3 ZT; ZB, BT; & æqualem eſſe rationi quadrati ZB ad triplum rect=li ZTB.

Rurſus cum *ft* ad *te* ſit ubique ut conſtans recta ZB ad reſpectivam abſciſſam *t* B; erit area Z *a* E T ad aream F Z T ut rectæ BN intervallum a centro gravitatis areæ (ideſt tri=li) FZT ad rectam ZB, ac proinde ut ſumma (*in fig.* 13.) differentia vero (*in fig.* 14.) ipſius BT, ac tertiæ partis ſegmenti TZ ad BZ, vel potius in utraque figura, ut ZB + 2 TB ad 3 ZB: ſed tri=lum ZFT ad tri=lum ZEB proportionem habet compoſitam ex ratione ZT . ZB; & ex ratione FT . TE, ſeu ZB . BT; Trilineum igitur Z*a*ET erit ad tri=lum ZEB in pro=ne compoſita ex ratione ZB + 2 TB . 3 ZB & ex ratione ZB . BT, & ex ratione ZT . ZB, ſeu compoſita ex duabus rationibus ZB + 2 TB . 3 ZB; ZT . TB, vel potius in proportione, quam habet rect=lum ſub ZT in ZB + 2 TB ad triplum rect=li ZBT: (1) Atqui tri=lum ZEB eſt ad bilineum ZVB ut triplum rect=li ZTB ad q: ZB, nempe in proportione compoſita ex ratione 3 TB . ZB, ſeu tripli rect=li ZBT ad q: ZB, & ex ratione ZT . ZB: hinc eſt, quod proportio trilinei parabolici Z*a*ET ad bilineum ZVB componentur ex ratione rect=li ſub ZT in ZB + 2 TB ad triplum rect=li ZBT, ex ratione hujus tripli ad q: ZB, & ex ratione ZT . ZB, & æquabitur rationi, in qua eſt parall=dum quadrati : ZT in ZB + 2 TB ad cubum ZB. Et convertendo patet, &c.

[1] *Coroll. antec.*

COROLLARIUM I.

Trilineum parabolicum BVZN, clauſum a curva parabolica, a diametro BN, & a contingente recta ZN ſubſequialterum erit tri=li ZBN.

Etenim in primæ partis demonſtratione indicatum eſt, bilineum ZVB ſe habere ad tri=lum ZNB ut ZB ad 3 ZB, videlicet in pro=ne ſubtripla; unde, &c.

COROLLARIUM II.

Parabolicum trilineum Z*a*ET, clauſum a parabolica curva, ab

ab altera diametro TE, & a recta ZT ſecante ipſam curvam, eamdem proportionem habebit ad tri=lum ZTE, quam ZB + 2TB ad 3TB.

Trilineum enim Z*a*ET (ut vidimus) eſt ad tri=lum ZFT ut ZB + 2TB ad 3BZ: & hoc tri=lum ZFT eſt ad tri=lum ZET ut FT ad TE, vel (ex ſupra oſtenſis) ut ZB ad TB, ſive ut 3ZB ad 3TB: unde ex æquo patet quod, &c.

THEOREMA IV. Propoſitio 4.

SI a centro gravitatis n *hyperbolici trilinei* F a N C *clauſi ab hyperbolica curva* F a N, *& a duabus rectis* FCM . NCR, *quæ aſymptotis* ZB . YB *æquidiſtent, ordinata ſit recta* nmu *ad alterum aſymptotum* YB; *atque ducta ſit chorda* FN *hyperbolici arcus* FAN, *claudens tri=lum* FCN, *bilineumque* FAN. fig. 15. & 16.

I. Trilineum FANC *ſe habebit ad tri=lum* FCN, *ut* mu *ad* nu. *&*

II. Bilineum FAN *erit ad idem tri=lum* FCN, *ut* nm *ad* nu. *&*

III. Quadrilineum hyperbolicum FANXM *erit ad parall=mum* NCMX *ut ſumma* (in fig. 15.) *& ut differentia* (in fig. 16.) *ipſarum* FC . 2nu *ad* 2nu.

Completo parall=mo FMBT, agatur ab hyperbolæ centro B recta BEL, quæ ordinatæ FM protractæ occurrat in L, & coordinatam FT ſecet in E, compleanturque parall=ma MLZB . VAZB per rectas LZ . VEA; & cum parall=mi MLZB complementa EZ . EM, proindeque parall=ma VZ . TM inter ſe ſint æqualia, neceſſe eſt punctum A in hyperbolica curva reperiri, ut ex ſecundo libro conicorum elementorum innoteſcit. Hoc poſito

Ad aſymptotum ZB ordinetur quæcumquæ recta *fdegt*, quæ trilineum F*a*NC ſecet: & quoniam ut conſtans recta ZB ad abſciſſam *t*B ita eſt *dt* ad *tg*, & (ob hyperbolam) ita eſt etiam *ft* ad AZ, vel ad *te*; & ſubſequenter ita *fd* ad *eg* ubique; & pariter ZB ad RB ut NC ad KP: area F*a*NC (1) erit ad aream EKP ut ZB ad *nu*. (1) *prop.* 1. *hujus.*

Sed hæc area, nempe tri=lum EKP eſt ad tri=lum FNC (2) ut KP ad NC, ſcilicet ut RB ad ZB; area F*a*NC ex æquo perturbate, ſe habebit ad triangulum FNC ut RB, ſeu *mu* ad *nu*. (2) *Elem* vi. *prop.* 1.

Et

Et comparando terminorum differentias ad conſequentes bilineum FaN ad tri=lum FNC erit ut um ad nu.

Rurſus cum trilineum FaNC ad triangulum FNC ſit ut mu ad nu, vel ut 2mu ad 2nu; triangulumque FNC ad parall=mum CNXM ut FC ad 2CM, ſeu ad 2mu; erit ex æquo trilineum FaNC ad parall=mum CNXM ut FC ad 2nu: & comparando terminorum ſummas (*in fig.* 15.) differentias autem (*in fig.* 16.) ad conſequentes, quadrilineum hyperbolicum FaNXM ad parall=mum CNXM ſe habebit ut ſumma quidem, aut differentia ipſarum FC. 2nu ad 2nu. quod &c.

SCHOLIUM.

Hic obiter innoteſcit ſolidum hyperbolicum infinite longum, circa aſymptotum BY, genitum ab hyperbolico ſpatio ZAYB, infinite quidem longo erga Y, duplum eſſe ſolidi ſimili modo progeniti a parall=mo AZVB; & ſe habere ad ſolida ſimiliter procreata a ſpatiis FYBT. ETZA. ET tf ut parall=mum AZBV ad reſpectiva parall=ma TV. TA. Te.

Quamquam hoc ſolidum ad menſuram primus omnium clariſſimus Torricellius vocaverit, meam nullatenus demonſtrationem hic apponere non erit inutile.

Cum igitur relatio ft. te ſit ubique conſimilis rationi conſtantis rectæ ZB ad abſciſſam BT; quæcumque ſit ordinata tef; prædictum ſolidum infinite longum, ad prædictum ſolidum parall=mi AZBV ſe habebit (per ſecundam partem primæ Prop.) ut ZB ad intervallum ipſius BY a centro gravitatis ejuſdem parall=mi AZBV, ſcilicet ad ipſius BZ dimidium; unde patet prima pars Propoſitionis: ſecunda pars vero pendet ex ſcholio 3 ejusdem primæ Propoſitionis.

THEOREMA V. Propoſitio 5.

fig. 17. & 18. D*atis duabus ordinatis* AD. BC *ad alteram* DV *ex duabus aſymptotis* DV. YV *hyperbolæ* AOBY, *quæ cum coordinatis* AQM. BZX *claudant parall=ma* AZBQ. CDZB: *datiſque duabus aliis ordinatis* FT. IN, *in quarum al-*

tera

Digitized by Google

tera F T *reperiatur centrum gravitatis* F *quadrilinei hyperbolici* AOBCD; *& in reliqua* I N *ſit centrum gravitatis trilinei hyperbolici* AOBZ.

I. Hyperbolicum quadrilineum AOBCD *ſe habebit ad trapetium* ABCD *non modo ut rect=lum ex prioribus ordinatis* AD. BC *ad rect=lum ſub* FT *in earumdem ordinatarum ſummam, ſed etiam ut duplum rect=li* BCV, *vel* ADV *ad rect=lum ſub* TV *in ipſam ſummam.*

II. Hyperbolicum trilineum AOBZ *ſe habebit ad parall=mum* AZBQ *ut* CB *ad* 2IN, *& ut* DV *ad* 2VN.

Sumptâ CE media proportionali inter duas CB. AD, & completo parall=mo ECDG, ipſius ſolidum, circa latus CD genitum, medio loco erit proportionale inter duo ſolida ſimiliter progenita a parall=mis ADCQ. BCDZ; æquabiturque ſolido, eodem modo procreato ab hyperbolico quadrilineo AOBCD; hoc enim ſolidum medio loco eſt (1) quidem proportionale inter ipſa ſolida parall=morum ADCQ. BCDZ. Quamobrem quadrilineum AOBCD ad parall=mum ECDG erit (2) reciproce ut EC ad 2FT: at parall=mum ECDG eſt ad trapetium ABCD ut 2EC ad AD + CB; proportio igitur quadrilinei AOBCD ad trapetium ABCD compoſita erit ex ratione EC. 2FT; & ex ratione 2EC ad AD + CB, & æquabitur rationi q: CE, ſeu rect=li AD, BC ad rect=lum ſub FT in AD + CB.

(1) ex Torricellio de ſolido hyperbolico acuto coroll. xvi.

(2) ex n. 4. ſup. 2.

Ulterius ſi ab ordinata DA abſcindatur ſegmentum DL potens duplum rect=li BCV, ſeu ADV, compleaturque parall=mum LDCR; annulo, circa aſymptotum V*y* deſcripto per quadrilineum AOBCD (3) æquabitur ſolidum, circa DC factum a parall=mo CL; quadrilineumque AOBCD ad parall=mum CL erit reciproce ut LD ad 2TV; at qui hoc parall=mum CL eſt ad trapetium ABCD ut 2LD ad AD + CB; erit igitur quadrilineum AOBCD ad trapetium ABCD in prop=ne compoſita ex ratione LD. 2TV, & ex ratione 2LD. AD + CD, ſcilicet ut q: LD, vel duplum rect=li BCV, aut rect=li ADV ad rect=lum ſub TV in AD + CB.

(3) ex Torricellio loco citato coroll. ix.

Rurſus cum inter ſe æqualia inventa ſint ſolida circa aſymptotum CD, deſcripta a parall=mo CG, & a quadrilineo AOBCD; inter ſe æquabuntur & annuli eodem modo geniti a paral=mo GEBZ, & a trilineo AOBZ, quibus illa ſolida differunt a ſolido

do

Digitized by Google

do ſimiliter procreato per parall=mum BCDZ; ac propterea trilineum AOBZ erit ad parall=mum GEBZ reciproce ut EC + BC ad 2IN: hoc autem parallelogrammum GEBZ eſt ad parall=mum AZBQ ut EB ad AZ; trilinei igitur AOBZ relatio ad parall=mum AZBQ compoſita erit ex ratione EC + CB . 2IN; & ex ratione BE . AZ, & aſſimilabitur rationi rect=li BE, EC + CB ad duplum rect=li AZ, IN; ſeu rationi in qua eſt differentia q: CB, aq: CE, vel a rect=lo BC, AD, ſeu a rect=lo BCQ ad duplum rect=li AZ, IN, vel potius rationi CB . 2IN.

Denique ordinando quamcumque rectam POH ad aſymptotum DCV, rectangula OPV . BCV, ac proinde rect=la OHX . PHB inter ſe erunt æqualia, pariterque cylindricæ ſuperficies genitæ a recta PH, circa CB, & a recta OH circa VX (1) inter ſe æquabuntur: atque annulus circa VX deſcriptus a trilineo AOBZ par erit ſolido, circa CB procreato per parallel=mum DCBZ: quo circa trilineum AOBZ ad parall=mum DCBZ erit reciproce ut DC ad 2NV: ſed ut DZ ad AZ, vel (ob hyperbolam) ut VD ad DC, ita eſt parall=mum DCBZ ad AQBZ; erit ex æquo perturbate trilineum AOBZ ad parall=mum AQBZ ut VD ad 2NV unde, &c.

(1) *ex n. 1. ſupp. 1.*

COROLLARIUM.

Hyperbolicum quadrilineum AOBCD erit ad parall=mum ADCQ ut BC ad 2TF; eritque ad parall=mum DCBZ ut AD ad 2TF.

Trilineum AOBZ ad tri=lum ABZ erit ut DZ ad IN, & ut DV ad NV . unde bilineum AOB ad tri=lum ABZ erit ut ipſarum DZ . IN differentia ad IN, & ut differentia DN duarum DV . NV ad NV.

Jam quadrilineum AOBCD eſt ad trapetium ABCD ut rect=lum AD, CB ad rect=lum AD + CB, FT; & hoc trapetium eſt ad parall=mum CA ut AD + CB ad 2AD, vel ut rect=lum FT, AD + CB ad rect=lum FT, 2AD: ex æquo igitur quadrilineum AOBCD ſe habebit ad parall=mum CA ut rect=lum AD, BC ad rect=lum FT, 2AD, nempe ut BC ad 2TF. Similique modo reperitur quadrilineum AOBCD eſſe ad parall=mum DCBZ ut AD ad 2TF.

Ul-

Digitized by Google

Ulterius cum parall=ma AC . QX inter ſe ſint æqualia, ob hyperbolam, diametrum VZ parall=mi DX, tranſibit per punctum Q, eritque diametrum, tam parall=mi BZAQ, quam bilinei BQA, & quam trilinei AOBZ, centrumque gravitatis ejuſdem trilinei reperietur (1) in ipſa diametro. Hoc poſito. (1) *ex Mechanicis.*

Jam trilineum AOBZ ad parall=mum AQBZ eſt ut DZ ad 2IN, & ut DV ad 2VN, parall=mum vero AQBZ eſt ad tri=lum ABZ ut 2IN ad IN, & ut 2VN ad VN; ex æquo igitur patet quod ſecundo loco pronunciatur.

THEOREMA VI. Propoſitio 6.

SI recta linea NDY *contingens hyperbolam in termino* D *alicujus ordinatæ* D& *ad alteram aſymptotum* YE, *claudat cum alia ordinata* AG *hyperbolicum trilineum* AADI, *a cujus centro gravitatis* T *ordinata ſit recta* TR *ad reliquam aſymptotum* EN, *completumque ſit triangulum* IDA *per rectam* DA. *fig* 19. & 20.

Trilineum hyperbolicum AADI *eamdem proportionem habebit ad triangulum* ADI, *quam* GE *ad ſeſquialterum rectæ* TR.

Ab ordinata GA protracta abſcindatur ſegmentum IM, ita ut IM ad IA eamdem habeat rationem, quam EG ad G&; quatenus rect=lum AI, GE rect=lo MI, G& adæquetur, ac ſuperficies, circa EN genita per rectam IA, ſuperficiei circa rectam D& deſcriptæ per rectam IM (2) adæquetur. Et ad aſymptotum GE ordinetur quævis alia recta *giam*, trilineum A*a*DI ſecans, & in recta DO, eidem aſymptoto GE parallela per D, capiatur tertia pars OH, quatenus in ipſa recta punctum H (3) ſit centrum æquilibrii tri=li IDM. (2) *ex n. 1 ſup. 1.* (3) *ex Archimede de æquipond. lib. 1. prop. XIV.*

Jam ſicuti contactus D tangentem *y*N (4) dimidiat, ita ordinata D& bifariam ſecabit latus E*y* tri=li *y*EN in &; & ideo quadratum G& ſummæ (*in fig.* 19.) ac differentiæ (*in fig.* 20.) quadrati *y*&, rect=lique EG*y* æquiparabitur (5). (4) *Apoll. l. 3 prop. 3. Conic.* (5) *ex ſecundo elem. Euc. prop. VI.*

Et quia (ob tri=lorum *y*GI . *y*&D ſimilitudinem) relatio *y*G . GI, ſeu relatio rect=li *y*GE ad rect=lum IGE, ſimilis eſt rationi *y*& . &D, ſeu rationi q: *y*& ad rect=lum D&E, ſive (ob hyperbolam), ad rect=lum AGE: (6) eidem rationi *y*& . &D conſimilis erit etiam proportio q: G& æquantis ſum- (6) *Eucl. elem. V. prop. XII.*

Digitized by Google

mam (*in figura* 19.) differentiam vero (*in fig.* 20.) quadrati y&, rect=lique EGY, ad rect=lum AI, GE æquans ſummam quidem aut differentiam rect=lorum AGE. IGE: ſimilique progreſſu reperitur ut y& ad &D (& per conſequens ut q: G& ad rect=lum AI, GE) ita eſſe q: g& ad rect=lum $a\,i$, g E. Et permutando efficietur proportio rect=li AI, GE ad rect=lum $a\,i$, g E (vel proportio cylindricæ ſuperficiei, circa EN deſcriptæ per rectam AI ad ſuperficiem cylindricam ſimiliter genitam a recta $i\,a$) conſimilis rationi q: G& ad q: g&, vel rect=li G&, MI ad rect=lum g&, $m\,i$, ſive rationi cylindricæ ſuperficiei circa D& progenitæ per rectam MI, ad ſuperficiem cylindricam ſimiliter creatam a recta $i\,m$. Verum ſuperficies cylindrica genita circa EN per rectam AI æquatur (ut ſupra vidimus) cylindricæ ſuperficiei deſcriptæ circa & D, a recta IM; neceſſe eſt igitur & ſuperficiem genitam circa EN per rectam $a\,i$, ubique adæquare ſuperficiem circa & D, creatam a recta $i\,m$, unde ſolidum circa EN factum a trilineo AaDI par erit ſolido circa D& procreato per tri=lum IDM. Quapropter trilineum AaDI ad tri=lum IDM (1) erit reciprocè ut HD (ſcilicet ſubſeſquialterum ipſius OD) ad RT, vel ut OD, ſeu G& ad ſeſquialterum ipſius RT. Eſt autem tri=lum IDM ad tri=lum IDA ut baſis IM ad baſim IA, ſive (per conſtructionem) ut EG ad &G; ex æquo igitur perturbate, trilineum AaDI ad tri=lum IDA ſe habebit ut GE ad ſeſquialterum rectæ RT, quod &c.

(1) *ex n. 1. ſupp. 2.*

COROLLARIUM.

Et comparando terminorum differentias ad conſequentes, bilineum hyperbolicum AaD erit ad tri=lum IDA, ut differentia ipſius GE a ſeſquialtero diſtantiæ TR ad hoc ſeſquialterum.

THEOREMA VII. Propoſitio 7.

fig. 21. 22. 23. & 24

SI *recta linea* LDBN *ſubtendens aſymptoticum angulum* LEN *curvæ hyperbolicæ* DAB, *ipſam curvam ſecet in extremitatibus duarum ordinatarum* KB, & D *ad alteram aſympto-*

tum

tum & E, *ſecetque in puncto* I *aliam ordinatam* A G: *& per rectam lineam* D H Z *huic aſymptoto parallelam completum ſit tri=lum* D H B:

I. Si a centro gravitatis T *bilinei hyperbolici* B A D *alia ordinetur recta* T R *uſque ad prædictam rectam ſecantem* L N: *idem bilineum* A B D *erit ad tri=lum* B D H *ut* B D *ad* 3 R N. *fig.* 21.

II. Si a centro gravitatis T *trilinei hyperbolici* B a D I *ordinetur alia recta* T R *uſque ad prædictam ſecantem* N L; *idem trilineum* A a D I *erit ad tri=lum* D F I [in fig. 22.] *ut* I B *cum tertia parte ipſius* I D *ad* R N, *&* (in fig. 23. & 24.) *ut exceſſus rectæ* I B *ſupra tertiam partem rectæ* I D *ad* R N. *fig.* 22. 23. & 24.

Rect=la A E G. B K E inter ſe ſunt æqualia, ob hyperbolam D a y; & facta proſtaphereſi, æquari debent & rect=la K G V. A V M. Inſuper inter ſe æquantur rectæ L N ſegmenta L B. D N; proindeque etiam partes L K. E & rectæ L E: unde E & ad G K ſe habebit ut L K ad G K, & ut G V ad V I; rect=gulumque & E, V I rect=lo V G K, ſeu rect=lo A V M par erit; & A V ad V I ſe habebit ut E & ad M V, vel ad G E, vel (ob hyperbolam) ut A G ad D &, ſeu ad F G: unde A V ad I A erit ut G A ad A F; & permutando erit G A ad V A, ut F A ad I A; proindeque G V ad V A ſe habebit ut F I ad I A; atque relatio I N, I B, vel M V, V B, quæ (ob æqualia rect=la K G V. A V M) ſimilis eſt rationi G V. V A, conſimilis erit quoque rationi F I. I A, rect=lumque A I N rect=lo F I B, & ſubſequentur (1) cylindrica ſuperficies circa E N deſcripta per rectam A I, cylindricæ ſuperficiei circa B K genitæ per rectam I F par erit. 1. *exn.* 1. *ſupp.* 1.

Pari modo ordinando quamcumque aliam rectam *g f a i u*, quæ bilineum D A B (*in figura* 21.) trilineum vero A a D I (*in reliquis*) ſecet, reperietur, cylindricam ſuperficiem circa E N genitam a recta *a i* ſuperficiei cylindricæ circa rectam B K a recta *f i* procreatæ, ubique adæquari; unde eſt quod ſolidum, circa E N deſcriptum (*in figura* 21.) per bilineum B A D, & [*in reliquis fig.*] per trilineum A a D I coæquabit ſolidum procreatum, circa B K (*in illa fig.*) per triangulum D H B, & (*in reliquis*) per tri=lum F D I. quo circa

Bilineum B A D ad tri=lum D H B erit (2) reciprocè ut tertia pars lateris B D (nempe ut intervallum puncti B a centro æquilibrii tri=li D H B, ſumpto in ipſo latere) ad R N, vel potius ut B D ad 3 R N. *fig.* 21. [2] *ex.* 5. *ſupp.* 2.

 Tri-

Digitized by Google

fig. 22. 23. & 24. Trilineum A a D I ad tri=lum I D F ſe reciprocè habebit ut ſumma (in fig. 22.) & ut differentia (in fig. 23. & 24.) [1] rectæ I B, & $\frac{1}{2}$ I D ad R N, ſcilicet ut puncti B diſtantia a centro æquilibrii tri=li I D F, ſumpto in latere D I ad R N. unde &c.

[1] ex n. 5. ſupp. 1.

THEOREMA VIII. Propoſitio 8.

fig. 25. 26. & 27. *Datis duabus areis* Q F T B . S N T B *ad eamdem diametrum* T B *ſe ſimiliter referentibus; ita ut quadrata ordinatarum* H R , h r *in altera area* Q F T B *ubique proportionentur reſpectivis ordinatis* G R . g r *in reliqua area* S N T B.

I. Prior area Q F T B *ad poſteriorem* S N T B *ſe habebit ut q: alterius ordinatæ* H R , *in illa area* Q F T B *ad rect=lum ſub homologam ordinatam* G R , *in hac area* S N T B , *& ſub duplum intervallum diametri* B T *à centro gravitatis prioris areæ* Q F T B.

II. Solidum deſcriptum circa diametrum T N *a priori area* Q F T B, *ad ſolidum ſimiliter factum à poſteriori area* S N T B *erit, ut q: alterius ordinatæ* H R , *in illa area* Q F T B, *ad rect=lum homologæ ordinatæ* G R , *intra ſecundam aream* S N T B , *in duplam diſtantiam diametri* B T *a centro gravitatis ejuſdem ſecundæ areæ* S N T B.

Dummodo prædicta intervalla ordinatis æquidiſtantia concipiantur.

Ponatur *u* R eſſe intervallum diametri B T a centro gravitatis areæ Q F T B , & R *u* eſſe diſtantiam ejuſdem diametri a centro gravitatis areæ S N T B.

Et quia, ex hypotheſi q: R H ad q: *r b* eſt ut G R ad *g r*, vel ut productum 2 G R , T B ad productum 2 *g r* , T B ; permutando erit q: R H ad productum 2 G R , T B (vel [2] ſuperficies, circa B T genita per ordinatam H R ad ſummam ſuperficierum progenitarum circa rectas B Q . T F ab ordinata G R) ut q: *b r* ad productum 2 *g r* , T B (ſive ut ſuperficies, circa B T deſcripta per ordinatam *r b* ad ſummam ſuperficierum progenitarum circa rectas B Q . T F ab ordinata *g r*) ubique. Unde proportio ſolidi, circa T B deſcripti ab area Q F T B ad ſummam ſolidorum, circa rectas B Q . T F procreatorum ab area S N T B ſimilis erit quidem rationi quadrati R H ad productum 2 G R , T B ;

[2] ex n. 9. ſupp. 1.

atque

atque proportio areæ QFTB, ad aream SNTB (compoſita (1) ſcilicet ex ratione illius ſolidi ad hanc ſummam, ſive ratione q: RH ad productum 2 GR, BT; & ex ratione quam habet BT ad Rn, ſeu productum 2 QR, BT ad productum 2 GR, Rn) æquabitur rationi quadrati RH ad productum GR, 2 Rn, ut primo loco proponitur. [1] ex n. 6. ſupp. 2.

Proportio vero ſolidi circa TB geniti ab area QFTB, ad ſolidum ſimiliter procreatum ab area SNTB (quæ componitur ex (2) ratione areæ QFTB, ad aream SNTB; ſeu ratione q: RH, ad productum GR, 2 Rn; & ex ratione diſtantiæ Rn, ad diſtantiam Ru, ſeu producti 2 Rn, GR, ad productum 2, Ru, GR) conſimilis erit rationi quadrati RH, ad productum 2 Ru, GR, ut ſecundo loco dicitur. (2) n. 1. ſupp. 2.

COROLLARIUM.

Si datæ areæ QFTB. SNTB communem habeant baſim, vel aliquam ordinatam QB; prior area QFTB, ſe habebit ad ſecundam SNTB, ut ipſa baſis, aut ordinata QB, ad duplum intervalli Rn diametri BT a centro gravitatis illius areæ QFTB. fig. 26. & 27.

Atque ſolidum circa diametrum BT deſcriptum a priori area QFTB, ad ſolidum ſimiliter factum a poſteriori area SNTB, erit ut ipſa baſis, aut ordinata communis QB, ad duplum diſtantiæ Ru diametri TB, a centro gravitatis poſterioris areæ SNTB.

Quandoquidem area QFTB eſt ad aream SNTB ut q: QB, ad duplum rect=li QB, Rn; ſolidumque prioris ad ſolidum poſterioris areæ eſt ut q: BQ, ad duplum rect=li QB, Ru.

THEOREMA IX. Propoſitio 9.

I. *Semiparabola* QHTB *ad tri=lum* QTB, *in eadem baſe* QB, *& in eadem altitudine conſtitutum, eſt ut baſis* QB *ad duplum intervalli* nB *diametri* BT *a gravitatis centro ipſius ſemiparabolæ: ſolidumque circa diametrum* TB *genitum a ſemiparabola* QHTB *ſeſquialterum eſt ſolidi ſimiliter progeniti a tri=lo* QTB. fig. 28.

II. Semiportio QHTB *conicæ ſectionis, centrum* O *habentis ad* fig. 29. 30. 31. & 32.

trian-

triangulum Q T B, *in eadem baſe* Q B, *& in eadem altitudine conſtitutum, eſt in proportione compoſita ex ratione baſis* B Q *ad duplum intervalli* B n *diametri* T B *a centro gravitatis ejuſdem ſemiportionis* Q H T B, *& ex ratione, quam habet tranſverſum latus* Z T *cum duplo partis* B Z *diametri, interceptæ inter baſim* Q B, *& verticem oppoſitum* Z, *ad triplum ejuſdem partis* B Z: *ſolidumque genitum circa diametrum* B T *a ſemiportione* Q H T B *eſt ad ſolidum ſimiliter procreatum a tri=lo* Q T B *ut latus tranſverſum* Z T *cum duplo prædictæ partis* Z B *diametri ad hoc duplum; ſumendo ſemper intervallum* B n *ordinatis parallelum*.

fig. 28.29 Ordinando quamcumque rectam H G R, quadratum Q B, ad quadratum H R erit (ob parabolam) ut B T ad T R, vel ut Q B ad G R ubique: quare ſemiparabola Q H T B, ad tri=lum Q T B erit [1] ut Q B ad duplum diſtantiæ B *n*: atque ſolidum genitum circa diametrum T B a ſemiparabola Q H T B, ad ſolidum ſimiliter deſcriptum a tri=lo Q T B erit ut Q B, ad duplum diſtantiæ diametri B T a centro gravitatis tri=li Q T B, ſcilicet (2) in proportione ſeſquialtera.

[1] *ex cor. prop.* 8.

(2) *ex Archimede de æque-pond. lib.* 1. *prop.* 14.

In reliquis figuris, eſto P O ſemitransverſum lateri tranſverſo T Z coniugatum, & ab ipſo abſcindatur ſegmentum O N tertio loco proportionale poſt duas rectas Q B. O P; quatenus quadratum Q B ad q: P O ſit ut Q B ad O N: & circa diametrum O N, ordinatamque Z T deſcribatur parabolica curva Z N *a* T, verticem habens in N, & quæ rectæ B Q occurrat in *a*, & in areis Q H T B. *a* G T B ordinetur quælibet recta H G R ipſi B Q parallela.

Et cum B Q ad O N ſe habeat, per conſtructionem, ut q: B Q ad q: O P, vel (3) (ob datam ſectionem Q H T B) ut rect=lum T B Z, ad rect=lum T O Z, ſive (ob parabolicam curvam) ut B *a* ad O N, neceſſario Q B æquabit B *a*.

(3) *ex coroll. prop.* 8.

Rurſus, ob datam ſectionem Q H T B, quadratum Q B, ad q: R H eſt ubique ut rect=lum Z B T ad rect=lum Z R T, vel, ob curvam parabolicam, ut B Q ad R G: & idcirco area Q H T B ad aream Q G T B erit ut B Q ad duplum diſtantiæ B *n*. (1)

(4) *ex corollar.* 2. *prop.* 3. At parabolicum trilineum Q G T B (4) eſt ad tri=lum Q T B ut Z T + 2 Z B ad 3 Z B; patet igitur ſemiportionem Q H T B conicæ ſectionis, centrum habentis, eſſe ad tri=lum Q T B in prop=ne compoſita ex rationibus B Q. 2 B *n*; Z T + 2 Z B. 3 Z B.

Præ-

Præterea proportio ſolidi circa BT geniti ab area QHTB ad ſolidum ſimiliter factum a tri=lo QTB componitur (1) ex ratione areæ QHTB ad tri=lum QTB, & ex ratione diſtantiæ Bn ad intervallum [ipſi Bn æquidiſtans] rectæ BT a centro gravitatis tri=li QTB, nempe ad tertiam partem lateris BQ, vel potius ratione 3 nB . BQ. (1) 12. 1. ſupp. 2.

Atqui rationem areæ QHTB, ad tri=lum QTB componunt relationes BQ . 2nB ; ZT+2ZB . 3ZB; patet igitur quod ſolidum ſemiportionis QHTB ex conica ſectione centro decorata, ſe habebit ad ſolidum tri=li QTB in proportione compoſita ex ratione ZT+2ZB . 3ZB, & ex ratione 3nB . 2nB, ſeu ratione 3ZB . 2ZB, videlicet erit ut ZT+2ZB ad 2ZB &c.

COROLLARIUM.

Poſito quod data ſemiportio QHTB ſit quadrans ellipſis, aut circuli; proportio ipſius quadrantis ad tri=lum QTB, conſimilis erit rationi quam habet QB, ad ſeſquialterum diſtantiæ Bn diametri BT a centro gravitatis ejuſdem quadrantis. fig. 31.

Quandoquidem componitur ex ratione BQ . 2nB, & ex ratione ZT+2ZB . 3ZB, ſeu ratione 2ZT . $\frac{3}{2}$ZT, vel ratione 2nB . $\frac{3}{2}$nB.

Et inſuper ſolidum, circa diametrum BT, genitum a quadrante QHTB ad ſolidum genitum a tri=lo QTB ſe habebit in prop=ne dupla.

Nam illud ad hoc ſolidum eſt ut ZT+2ZB ad 2ZB, ſcilicet ut 2ZT ad ZT.

THEOREMA X. Propoſitio 10.

Semiportio ABCD *conicæ ſectionis centro* P *decoratæ ad triangulum* ADC *in eadem baſe* AD, *&* *in eadem altitudine conſtitutum, eſt ut rect=lum ex baſe* AD, *in latus tranſverſum* CE *cum duplo partis* DE *interceptæ inter baſim* AD, *&* *inter oppoſitum verticem* E, *ad ſextuplum ſub hanc diametri partem* DE, *in intervallum* OD *ipſius diametri* DC, *a centro gravitatis prædictæ ſemiportionis; dummodo hoc intervallum ſupponatur ordinatis parallelum.* fig. 33. & 34.

A dia-

Digitized by Google

A diametro CD abſcindatur tertia pars DV; quatenus punctum V in latere CD ſit (1) centrum æquilibrii trianguli ACD, & quatenus 3 VE æquet EC + 2 DE: & a baſe AD protracta abſcindatur hujuſmodi ſegmentum DF, ut ſit tertium proportionale poſt 2 DE, & poſt DA, & per conſequens q. AD duplo rect=li FDE ſit æquale. Compleaturque triangulum FCD per rectam FC, quæ protracta occurrat in N ordinatæ EN: & inſuper ducatur quævis ordinata BGHI ſecans ſemiportionem ABCD.

(1) ex Archimede de æquepond. l. 1. pr. 14.

Et quoniam, ob conicam ſectionem ABCD, quadratum AD ad quadratum BH eſt ut rectangulum EDC ad rectangulum EHC, vel ut rectangulum EDF ad rectangulum EHI; quemadmodum quadratum AD, per conſtructionem, æquatur duplo rectanguli FDE, ita duplo rectanguli IHE quadratum BH ubique par erit; & ideo ſuperficies genitæ circa CD per ſemiordinatas AD. BH cylindricis ſuperficiebus circa EN procreatis a rectis FD. IH reſpective (2) æquabuntur ubique.

(2) ex n. 7. ſupp. 1.

Unde infertur, quod ſolidum, circa CD deſcriptum a ſemiportione ABCD æquabitur annulo circa EN genito per triangulum FCD; atque area ABCD eamdem proportionem habebit (3) ad tri=lum FCD, quam reciproce habet diſtantia VE ad diſtantiam OD.

(3) ex n. 4. ſupp. 2.

Sed triangulum FCD eſt ad triangulum ACD ut DF, ad AD, vel [ob conſtructionem] ut AD ad 2 DE; proportio ergo ſemiportionis ABCD, ad triangulum ACD componetur ex ratione VE. DO, & ex ratione AD. 2 DE, aſſimilabiturque rationi, in qua eſt rectangulum VE, AD ad duplum rectanguli EDO, vel in qua eſt triplum illius ad ſextuplum hujus rectanguli, ſcilicet in qua ſe habet rectangulum ſub AD in EC + 2 DE ad ſextuplum rectanguli EDO &c.

SCHOLIUM

Hic animadvertere prodeſt, quod ſolidum circa diametrum CD deſcriptum a ſemiportione ABCD, erit ad ſolidum ſimiliter factum a parall=mo AZCD, ut CE + 2 DE ad 6 DE.

(4) ex n. 5. ſupp. 2.

Nam proportio illius ad hoc ſolidum componitur ex (4) ratione ſemiportionis ABCD ad parall=mum AZCD, ſeu ad duplum tri=li ACD (nempe ratione rect=li AD, EC + 2 DE

ad

Digitized by Google

ad duodecuplum rect=li EDO, ſeu ratione producti a DO in rect=lum AD, EC + 2DE ad productum a DO in duodecuplum rect=li EDO; ſeu a 2DO in ſextuplum rect=li EDO) & ex ratione, quam habet duplum diſtantiæ DO ad AD, vel productum a 2DO in ſextuplum rect=li EDO ad productum ab hoc ſextuplo in AD; & per conſequens conſimilis eſt rationi producti a DO in rect=lum AD, EC + 2DE ad productum a DA in ſextuplum rect=li EDO, ſcilicet ut EC + 2DE ad 6DE.

THEOREMA XI. *Propoſitio* 11.

Dato quadrilineo ABHE *abſciſſo, in conica ſectione centro* H *decorata, per duas ſemiordinatas* AE. BH *ad ſecundam* HE *duarum coniugatarum diametrorum; quarum ordinatarum altera* BH *procedat a centro* H, *ſitque baſis parall=mi in eadem altitudine conſtitui.* fig. 35. & 36.

I. Idem quadrilineum ABHE *ſe habebit ad parall=mum* BFEH *ut quadratum reliquæ baſis* AE *cum duplo quadrato prioris baſis* BH *ad ſextuplum rect=li ſub hanc baſim* BH *in diſtantiam* QE *diametri* HE *a centro gravitatis prædicti quadrilinei; dummodo ipſa diſtantia ordinatis æquidiſtet.*

II. Solidum, circa diametrum HE *deſcriptum ab ipſo quadrilineo* ABHE *ſe habebit ad ſolidum ſimiliter factum a parallelogrammo* BFEH *ut quadratum poſterioris baſis* AE *cum duplo quadrati prioris baſis* BH *ad hujus quadrati triplum.*

A baſe AE protracta abſcindantur talia ſegmenta CE. DE, ut quadratum alterius CE triplo quadrati BH, quadratumque reliqui DE æquetur q: AE, cum duplo q: BH, ac propterea quadratorum CE. DE differentia æquetur differentiæ quadrati AE cum duplo quadrati BH a triplo q: BH, ſcilicet differentiæ quadratorum AE. BE: atque completis tri=lis DHE, CHE dematur a DE tertia pars EP, quatenus tri=li DHE centrum æquilibrii in latere DE (1) ſit P: & circa EH deſcribantur ſolida tam ab areis ABHE. FBHE. ABF, quam a tri=lis DHE. CHE. CHD.

(1) ex Archimede de æquepond. l. 1. pr. 14.

Jam ex conicis elem. notum eſt rectam BF contingere curvam AB in B, & ordinando quamcumque rectam KRILM,

Digitized by Google

differentiam quadratorum A E . F E eſſe ad quadratorum K I . K R differentiam ut q: F B ad q: B R, vel ut q: E H ad q: I H, vel ut differentiam quadratorum D E . C E ad differentiam quadratorum M I . L I; at differentia qq: A E . F E æquatur [ut ſupra diximus] differentiæ quadratorum D E . C E; differentia ergo qq: K I . K R differentiæ qq: M I . L I æquari debebit; ſuperficieſque, circa H E genita per rectam K R ſuperficiei ſimiliter progenitæ a recta L M ubique par (1) erit: quamobrem ſolidum trilinei A B H ſolido trianguli D H C erit æquale: atqui ſolidum tri=li C E H æquatur ſolido parall=mi H F, ob quadratum C E æquans triplum q: B H (2) per conſtructionem; ſolidum igitur quadrilinei A B H E ſolido tri=li D H E erit quidem æquale; quadrilineumque A B H E ſe habebit ad triangulum D H E reciproce (3) ut diſtantia P E, ad diſtantiam E Q, vel ut D E ad 3 E Q: hoc autem tri=lum D H E eſt ad parall=mum F H ut D E ad 2 B H; quadrilineum igitur A B H E ad pall=mum F H proportionem habebit compoſitam ex rationibus D E . 3 Q E; D E . 2 H B, nempe æqualem rationi, quam habet q: D E (vel q: A E cum duplo q: B H) ad rect=lum ſub 2 H B in 3 Q E, ſive ad ſextuplum rect=li H B, Q E.

(1) ex n. 5 ſup. 1.

(2) Eucl. elem. XII. prop. 10. & 11.

(3) ex n. 4 ſupp. 2.

Deinde proportio, quam habet ſolidum quadrilinei A B H E ad ſolidum parall=mi F H conſimilis eſt rationi, in qua eſt ſolidum tri=li D H E ad ſolidum tri=li C H E; quandoquidem hæc ſolida illis reſpective æquiparantur; vel ut q: D E ad q: C E, ſive ut q: A E cum duplo q: B H ad triplum q: B H.

THEOREMA XII. Propoſitio 12.

fig. 37. 38 & 39.

I. P*ortio* A L B C *conicæ ſectionis centro* O *decoratæ, ſe habet ad tri=lum* A B C, *in eadem baſe* A C *conſtitutum, & in eadem altitudine, ut diametri pars* D X *comprehenſa inter baſim* A C, *& oppoſitum verticem* X *ad ſeſquialterum diſtantiæ* V O *prædicti centri* O *a centro gravitatis* V *ipſiuſmet portionis* A L B C.

II. Eadem portio A L B C *eſt ad tri=lum* A O C *eamdem baſim habens* A C, *verticem vero in centro* O *ſectionis, ut rect=lum* X D B, *ſub portionis diametrum* D B *in ſupradictam partem* D X, *ad*

Digitized by Google

ad ſeſquialterum rect=li DOV *ſub diametri partem* DO *poſitam interbaſim* AC *& inter ipſum centrum* O, *in hujus centri diſtantiam* OV *a centro gravitatis* V *ejuſdem portionis* ALBC; *vel etiam ut baſis* AC *ſubtangens ad ſeſquialterum ipſius diſtantiæ* VO.

Detur primo portionem ALBC eſſe hyperbolicam, *in figur.* 37. vel eſſe ellipticam, & ad alteram partem centri O, *in* 38. *fig.* & in utraque abſcindatur a diametro DBO ſegmentum OI potens rect=lum XDB, nempe differentiam qq: DO. BO, & compleantur parall=ma ACEF. FEGH per rectas AFH; CEG, diametro DB parallelas, tri=lumque HOG, in cujus diametro IO ſumatur tertia pars IS; quatenus ipſius tri=li centrum gravitatis (1) ſit S; & inſuper ad coniugatam diametrum EF conicæ ſectionis ordinetur quælibet recta MLKPR. (1) *ex Archim. de æquepond l.* 1. *pr.* 14.

Jam differentia qq. DO. BO ad differentiam qq: KM. KL eſt (2) ut rect=lum GIH ad rect=lum GRH, vel ut q: OI ad differentiam qq: RK. PK. ſed q: OI, per conſtructionem, æquatur differentiæ qq: DO. BO; ergo differentia qq: RK. PK differentiæ qq: MK. LK ubique erit æqualis, ſuperficieſque circa EF deſcriptæ per rectas LM. PR inter ſe ubique [3] æquabuntur; quo circa inter ſe quidem æqualia erunt, & ſolida ſimiliter circa EF procreata per portionem ALBC, triangulumque HOG: atque portio ALBC ad tri=lum HOG, erit reciproce [4] ut diſtantia SO ad diſtantiam OV, ſive ut IO ſeſquialterum illius SO ad hujus diſtantiæ OV ſeſquialterum: tri=lum autem HOG eſt ad tri=lum ABC, ut OI ad BD; proportio igitur portionis ALBC ad tri=lum ABC componetur ex ratione IO. $\frac{3}{2}$OV, & ex ratione IO. BD, æquabiturque rationi q: OI, ſeu rect=li XDB ad rect=lum ſub BD in $\frac{3}{2}$VO, vel potius rationi, in qua eſt DX ad $\frac{3}{2}$VO. [2] *ex* *con cis Elem.* (3) *ex* 5. *ſupp.* 2. [4] *ex* 5. *ſupp.* 2.

Ubi vero elliptica portio ALBC non ſit ad alteram partem centri O, ideoque ſemiellipſim excedat; ponatur reſiduæ portionis ANXC centrum gravitatis in puncto T reperiri, compleaturque tri=lum AXC. Et quoniam integræ ellipſis centrum O, eſt etiam centrum gravitatis ejuſdem ellipſis compoſitæ ex duabus portionibus ALBC. ANXC; portio ALBC ad portionem ANXC (5) erit reciproce ut TO ad OV, vel ut $\frac{3}{2}$TO ad $\frac{3}{2}$OV: *fig.* 39. (5) *ex me. ban.*

Digitized by Google

$\frac{3}{2}$ OV: & cum hæc portio ANXO [quæ jacet ad alteram partem centri O] ſit ad tri=lum AXG ut BD ad $\frac{3}{2}$ TO, triangulumque AXO ad tri=lum ABC ſit ut DX ad DB; portio ALBC, ex æquo perturbate, erit ad tri=lum ABC ut XD ad $\frac{3}{2}$ VO.

Præterea, in omnibus figuris, tri=lum ABC, ad tri=lum AOC eſt ut BD ad DO; ergo proportio portionis ALBC ad tri=lum AOC, compoſita erit ex ratione XD . $\frac{3}{2}$ VO, & ex ratione BD . DO, & adæquabitur rationi rect=li XDB ad ſeſquialterum rect=li DOV.

(1) Apoll. 1. pr. 37. At ſupponendo DZ eſſe ſubtangentem baſis AC, rect=lum ODZ(1) rect=lo XDB par erit, atque proportio rect=li XDB ad ſesquialterum rect=li DOV [nempe proportio portionis ALBC ad tri=lum AOC] ſimilis erit rationi rect=li ODZ, ad ſeſquialterum rect=li DOV, ſcilicet rationi ſubtangentis DZ ad $\frac{3}{2}$ VO.

THEOREMA XIII. *Propoſitio* 13.

fig. 40. 41 42. 43. & 44. *Dato, quod duæ ordinatæ inæquales* AD, BC *ad aliquam diametrum* FEO *conicæ ſectionis, centro* O *decoratæ abſcindant quadrilineum* AZBCZD, *atque differentia* AS *minoris ſemiordinatæ a majori ita ſit diviſa in puncto* N, *ut ſe habeat ad ſegmentum* SN *ut* 3AF + 3BE *ad* BE + 2AF.

Idem quadrilineum AZBCZD *ſe habebit ad quadrilaterum* ABCD *in proportione compoſita ex ratione lateris tranſverſi ad latus rectum ejusdem diametri* FEO, *&* *ex ratione, quam habet rect=lum* AS, NF *ad rect=lum ſub quadrilateri diametrum* EF *in diſtantiam* OV *centri ſectionis conicæ a centro gravitatis ipſiuſmet quadrilinei.*

Ponatur primo, quadrilineum AZBCZD eſſe ad alteram partem centri O integræ ſectionis, ſitque XX diameter ipſi EFO coniugata, ideoque ordinatis AD . BC parallela: & in ſectione conica hæc diameter EFO ſit prima duarum coniugatarum, fig. 40. & 41. *in fig.* 42. ſit autem ſecunda, *in* 41. *fig.* Et ab ipſa diametro EFO abſcindantur duo ſegmenta ON . OH, quorum alterum ON poſſit differentiam [tam *in figura* 42. quam *in figura* 40. indicante ſectio-

ſectionem ellipticam] quadrati EO a quadrato ſemitransverſi lateris OG diametri EFO; poſſit vero ſummam, *in fig.* 41. quadrati EO, quadratique ex ſemitranſverſo latere OG diametri EFO; quæ differentia, aut ſumma, ſe habet [ex conicis Elem.] ad q: ſemiordinatæ BE, ut latus transverſum, ad latus rectum; reliquum vero ſegmentum OH poſſit reſpectivam differentiam, aut ſummam q: FO, quadratique ex prædicto ſemilatere tranſverſo GO; quatenus quadratorum HO. NO differentia æquetur differentiæ, quæ reperitur inter priorem illarum differentiarum, aut ſummarum, & inter poſteriorem; nempe differentiæ quadratorum EO. FO.

Poſtea completis parall=is BMLC. AKID, agantur diagonales IO. KO, quæ per puncta ML reſpective tranſibunt; quandoquidem q: OH ad q: ON eſt ut ſupradicta differentia, aut ſumma qq: FO, GO ad prædictam differentiam, aut ſummam qq: EO. GO, & per conſequens ut q: AF ad q: EB, vel ut q: HK ad q: MN.

Atque ſecetur HN in P, ita ut NH ad HP ſit ut AS ad S*n*, vel [ob hypotheſim] ut 3 *n*F + 3 EB ad BE + 2 AF; vel ut 3 KH + 3 NM ad NM + 2 KH; quatenus punctum P ſit (1) centrum gravitatis trapetii KMLI, & amplius rect=lum (1) *ex* NH, PO ad rect=lum AS, *n*F eamdem habeat rationem, quam *Archim. de æque-pond.* q: ON, ſeu prædicta differentia, aut ſumma qq: EO. GO, ad q: BE (ſiquidem OP, ON, & F*n*, FS, ſunt partes ſimiles ipſarum OH, FA) ſcilicet quam transverſum latus ad rectum.

His præmiſſis, & ad diametrum XOX ordinata quacumque recta &Z X Y *a*, quadratorum S*m*. B*m* differentia ad differentiam qq: &X. ZX (2) erit ubique ut rect=lum ASD, ad rect-(2) *ex co-nic. elem.* lum A&D, vel ut rect=lum KRI ad rect=lum K*a*I, ſive ut quadratorum R*m*. M*m* differentia ad differentiam qq: *a*X. YX (dummodo ipſa ordinata non jaceat inter duas BM. CL) ideoque hæc differentia qq: *a*X. YX differentiæ qq: &X. ZX par erit; ob quadratorum R*m*. M*m*, aut quadratorum HO. NO differentiam æqualem (ex conſtructione) differentiæ qq. FO. EO, ſeu qq: S*m*. B*m*. Quamobrem ſuperficies genitæ circa OX a rectis &Z. Y*a* inter ſe æquabuntur; & ſubſequenter inter ſe æqualia reperientur ſolida progenita quidem circa OX ab areis AZBCZD. KMLI; quadrilineumque AZBCZD, ad trapetium

KMLI

Digitized by Google

[1] ex. n. 5. ſupp. 1. KMLI erit (1) reciproce ut diſtantia PO ad diſtantiam VO; atqui trapetium KMLI ad trapetium ABCD eſt ut HN ad EF; proportio igitur quadrilinei AZBCZD ad trapetium ABCD conſimilis erit rationi rect=li HN, PO ad rect=lum EF, VO; ſcilicet compoſita erit ex ratione rect=li HN, PO ad rect=lum AS, NF; ſeu ratione, in qua eſt latus transverſum ad latus rectum diametri EFO; & ex ratione rect=li AS, NF ad rect=lum EF, VO.

fig. 43. & 44. Dum vero datum quadrilineum AZBCZD non jaceat totum ad alteram partem centri O, ac diametri XOX, diametro EF coniugatæ; ſi abſcindatur ab hac diametro pars OQ æqualis ſegmento OF, ordineturque per Q recta LQM [quæ ordinatam AD æquabit] efficietur quadrilineum AZLMZD, baſes AD, LM æquales habens, centrumque gravitatis in O; & cum idem quadrilineum AZLMZD conſtet ex duobus quadrilineis AZBCZD, LBCM; ſi ponatur in puncto T centrum gravitatis quadrilinei LBCM; neceſſe eſt, quadrilineum AZBCZD ad quadrilineum LBCM eſſe (2) reciproce ut diſtantia TO, ad diſtantiam VO, vel ut rect=lum TO, QE ad rect=lum VO, QE; ſed quadrilineum LBCM [per præcedentem caſum] eſt ad trapetium LBCM in proportione compoſita ex ratione lateris transverſi, ad latus rectum diametri FQ, & ex ratione rect=li AS, NF ad rect=lum TO, QE; atque trapetium LBCM eſt ad trapetium ABCD, ut EQ ad EF, vel ut rect=lum OV, QE ad rect=lum VO, FE; hinc colligitur, quod quadrilineum AZBCZD ad quadrilaterum, ſeu trapetium ABCD erit in pro=ne compoſita ex ratione lateris transverſi ad latus rectum diametri EQ, & ex ratione rect=li AS, NF ad rect=lum EF, VO: quod &c.

(2) ex Mechan.

COROLLARIUM.

Quoties igitur diametri FOE latera transverſum, ac rectum inter ſe ſint æqualia [quod ſequitur in circulo, vel hyperbola æquilatera] quadrilineum AZBCZD erit ad trapetium ABCD, ut rect=lum AS, NF ad rect=lum EF, VO.

LEM-

LEMMA I. Propoſitio 14.

SI recta linea OF inæqualiter ſit diviſa in I: duplum ſummæ quadratorum OF . IF . IO æquabitur quadrato differentiæ ſegmentorum FI . OI una cum triplo quadrati ex data recta OF. fig. 45.

Si fiat IE æqualis IO, dimidieturque in *a* differentia FE ſegmentorum IO . IF; patet, quod *a* ſubdupla erit datæ rectæ OF: unde, ex nona ſecundi elementorum Eucl. ſumma quadratorum FI . OI duplo ſummæ quadratorum *a* I . *a* F adæquabitur, duplumque illius quadruplo hujus ſummæ æquiparabitur, vel potius duobus ſimul quadratis OF . EF par erit; quippe quadratum OF quadrati *a* I, quadratumque EF quadrati *a* F quadruplum eſt. Et addito hinc inde duplo quadrati OF, hujus quadrati duplum cum duplo quadratorum FI . OF quadrato EF cum triplo quadrati OF æquale erit. Quod &c.

LEMMA II. Propoſitio 15.

SI recta linea ZE in tres partes æquales ZO . OI . IE ſit diviſa, & altera EI extremarum ſegmento EF ſit adaucta in fig. 46. diminuta autem in fig. 47. fig. 46. & 47.

Differentia in priori figura, ſextupli rect=li OFI *a duplo rect=li* ZFE *æquabitur quadrato* FE *cum triplo q.* OF.

Duplum rectanguli ZFE, *in poſteriori figura, una cum ſextuplo rect=li* OFI *æquabitur quadrato* FE *cum triplo quadrati* OF.

Si fiat O*y* æqualis IF, rect=lum OFI rect=lo *y*IF, vel potius ſummæ, *in fig.* 46. ac differentiæ, *in fig.* 47. rect=li ZFE, rectangulique ZIE, ſeu dupli quadrati OI adæquabitur: unde triplum rect=li OFI æquabitur eidem ſummæ, aut differentiæ, una cum duplo rect=li OFI.

Atque ablato hinc inde, *in fig.* 46. rect=lo ZFE, exceſſus tripli rect=li OFI ſupra rect=lum ZFE, æquabitur duplo rectanguli OFI cum duplo quadrati OI, vel æquabitur quadratis OF . IF . OI ſimul ſumptis; & exceſſus ſextupli rect=li OFI ſupra duplum rect=li ZFE æquiparabitur duplo aggregati quadrato-

rum

rum OF. IF. OI, ſcilicet, ex præcedenti lemmate, par erit quadrato EF cum triplo quadrati OF.

At *in fig.* 47. addito hinc inde rect=lo ZFE; hoc rect=lum ZFE una cum triplo rect—li OFI æquabitur rect=lo ZIE cum duplo rect=li OFI; ſeu æquabitur duplo quadrati OI cum duplo rect=li OFI, vel potius æquiparabitur tribus ſimul quadratis OF. IF. IO: quare duplum rect=li ZFE cum ſextuplo rect=li OFI æquabitur duplo quadratorum OF. IF. OI, vel potius, per præcedens lemma, quadarto EF cum triplo q: OF &c.

THEOREMA XIV. Propoſitio 16.

fig. 48. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. *SI duæ ſemiordinatæ inæquales* AD. LC *ad alteram* CI *ex duabus conjugatis diametris* CI. IEF *conicæ ſectionis, centro* I *decorate, abſcindant quadrilineum* ASLCD, *ac ſint baſes oppoſitæ trapetii* ALCD; *atque ſumma abſciſſarum* CI. DI (*ubi prædictum centrum non ſit inter ipſas ordinatas*) *differentia autem in reliquo caſu, æquet rectam* CQ.

Proportio quadrilinei ASLCD *ad trapetium* ALCD *componetur in utroque caſu, ex ratione, quam habet* CQ *ad duplum intervallum* MI *reliquæ diametri* FI *a centro gravitatis* M *ejuſdem quadrilinei, & ex ratione, in qua quadratum differentiæ cum triplo q. ex ſumma prædictarum ſemiordinatarum eſt ad hoc triplum.*

Ponatur quadrilineum ASLCD eſſe hyperbolicum *in fig.* 48. 50. 51. & 53. & eſſe ellipticum *in fig.* 49. 52. & 54. & compleatur parall=mum LCDG.

Et dum altera ordinata, ſeu baſis AD congruat dimidio IE tranſverſi lateris OE, ſolidum, circa diametrum IF deſcriptum a ſemiportione hyperbolica, aut elliptica LEF, ſe habebit

1) ex ſchol. prop. 10. [1] ad ſolidum ſimiliter factum a parall=mo FK ut AO + 2FO ad 6. FO, vel ut productum ab AF in AO + 2FO ad ſextuplum rect=li AFO; hoc autem ſolidum parall=mi FK eſt ad ſolidum ſimiliter progenitum a parall=mo FC, ut parall=mum FK, ad parall=mum FG, vel ut AF ad IF, vel ut ſextuplum rect—li OFA ad ſextuplum rect=li OFI; erit ex æquo prædictum ſolidum ſemiportionis LSAF ad ſolidum parall=mi CF ut AF in

ſub A O + 2 F O ad ſextuplum rect=li O F I, vel potius [facta O Z æquali ad O I] ut duplum rect=li Z F A ad ſextuplum rect=li O F I.

Et comparando ſummas [*in fig.* 49.] differentias vero [*in fig.* 48.] ad conſequentes terminos, erit ſolidum a quadrilineo L S A D O genito circa I F ad prædictum ſolidum parall=mi E C, ut ſumma reſpective, aut differentia ſextupli rect=li O F I, duplique rect=li Z F A ad ſextuplum rect=li O F I, ſcilicet [1] ut q: E F cum triplo q: O F ad ſextuplum rect=li O F I. [1] *ex lem* 2.

Quamobrem proportio quadrilinei A S L C D ad parall=mum F C, quæ componitur (2) ex ratione C Q. 2 I *m*, & ex ratione illius ad hoc ſolidum; componetur quoque ex ratione C Q. 2 I *m*, & ex ratione q: E F cum triplo quadrati O F ad ſextuplum rect=li O F I. Atqui parall=mum C F ad trapetium A L C D eſt ut 2 F I ad L C + D A, ſive ut duplum rect=li O F I ad F O in L C + D A, vel ut ſextuplum rect=li O F I ad triplum rect=li ſub F O in L C + D A, vel in F I + E I, ſcilicet ad triplum q: F O ex ſumma baſium L C. A D. Proportio igitur quadrilinei A S L C D ad trapetium A L C D compoſita eſt ex ratione C Q. 2 I *m*, & ex ratione q: E F cum triplo q: ex prædicta baſium ſumma ad hoc triplum Q. E. D. (2) *ex n.* 2. *ſup.* 2. *fig.* 50. 51 & 52.

Si quadrilinei A S C L D hyperbolici *in fig.* 50. & 51. elliptici *in fig.* 52. baſes A D. L C ad eandem partem centri I reperiantur, eſto I N ſemilatus transverſum diametri I E F, & ipſi ſemiconiugatum ſit I H, completiſque parall=mis L C I B. A D C K. C K F I, fiat I O æqualis I E, ſeu L C; quatenus O F ſummæ ordinatarum L C. A D æquetur: & ut quadratum I N ad q: I H ita fiat q: I O ad q: I Y; & circa eandem diametrum E F I ſimiliter conſtituatur curva P E, quæ ſit elliptica *in fig.* 50. & 51. ſit vero hyperbolica *in fig.* 52. & quæ in utroque caſu vertices oppoſitos habeat in punctis O. E, ac centrum in I, & ſemitransverſo lateri I E ſemiconiugatum ſit I Y, & amplius ordinatæ A F occurrat ipſa curva P E in puncto P, compleaturque parall=mum P B I F.

Et cum, ob hanc curvam P E, differentia qq: E I, F I ſit ad ſemiordinatæ P F quadratum ut quadratum ſemitransverſi I O ad q: ſemiconiugati I Y, vel (per conſtrutionem) ut q: I N, ad q: I H; ſive (ob curvam L A) ut quadratorum (3) E I. F I differentia ad differentiam qq: L E. G E; huic differentiæ, ſeu differentiæ qq: K F. A F æquabitur q: P F; unde ſuperficies genitæ circa I E a re- [3] *ex conic. Elem.*

(1) ax. 5. ſupp. 1. ſtis AKLIRB inter ſe erunt (1) æquales; eodemque progreſſu, ordinando quamcumque ſectam XTSR, inter ſe pares ubique reperientur ſuperficies progenitæ quidem circa diametrum IE a rectis XR, TS: quo circa ſolidum deſcriptum circa IB a trilineo PBF, annulo ſimiliter facto per trilineum ALK ſolidumque parall=mi PBIF annulo parall=mi AKCD, atque ſolidum quadrilinei RBIE annulo quadrilinei LSADC æquabitur; dummodo ipſa ſolida circa IE deſcripta intelligantur.

Et inſuper annulus quadrilinei ASLCD ad annulum parall=mi AKCD ſe habebit ut ſolidum quadrilinei RBIE (alteram baſim IE habentem, quæ ſemitranſverſo IE congruit) ad ſolidum parall=mi PBIF, ſcilicet (per ea quæ in ſuperiori caſu oſtenſa ſunt) ut q: FE cum triplo q: FO ad ſextuplum rect=li OFI:

Unde proportio quadrilinei LSADC ad parall=mum AKCD componetur ex ratione CQ: 2. Im, & ex ratione illius ad hunc annulum; ſeu ratione q: FE cum triplo q: FO ad ſextuplum rect=li OFI: ſed parall=mum AKCD ad trapetium LADC eſt ut 2 AD ad AD + LC, ſive ut 2 FI ad FO, vel ut ſextuplum rect=li OFI ad triplum q: FO: conſtat igitur, quod proportio quadrilinei ASLCD ad trapetium ALCD componetur ex ratione CQ: 2 Im; & ex ratione q: FE cum triplo q: FO ad hoc triplum q: FO, &c. D.

fig. 53. & 54. Denique ſi ſectionis conicæ centrum E reperiatur inter ordinatas AD, LC quadrilinei ASLCD, & baſis LC major ſit *in fig.* 53. minor autem baſe AD *in fig.* 54. & completo parall=mo LCDG, producatur LG in P; quatenus LP ſit integra ordinata ad diametrum IE, compleaturque parall=mum LPHC, ac trapetium PADH, & facta IO æquali ad IE ſit I*n* diſtantia centri gravitatis quadrilinei PADH a prædicta diametro IE.

Et quoniam ſectionis centrum E eſt etiam centrum æquilibrii quadrilinei LSPHC baſes LC, PH æquales habentis, conſtantiſque ex duobus LSADC, PADH; proportio quadrilinei LSADC ad quadrilineum PADH ſimilis (2) erit rationi, quam reciproce habet *n*I ad I*m*, vel 2 *n*I ad 2 I*m*; ſed quadrilineum PADH ad trapezium PADH eſt (ex præcedenti caſu) in prop=ne compoſita ex ratione DC. 2. *n*I, & ex ratione q: FE cum triplo q: FO ad hoc triplum; atque trapetium PADH eſt ad trapetium LADC ut DH, ſeu CQ ad GD; colligitur inde, quod proportio quadrilinei LSADC ad trapetium ALCD componetur ex ratione CQ

(2) ex mechanicis.

num I; & ex ratione q: FE cum triplo q: FO ad hoc triplum, &c.

SCHOLIUM.

Solidum genitum circa diametrum IF a quadrilineo LSADC ad ſolidum ſimiliter progenitum a parall=mo CDV ſe habebit ut q: ex differentia EF cum triplo q: ex ſumma FO baſium AD. LC ad ſextuplum rect=li OF. IN ſub ipſam ſummam OF in ſemilatus transverſum IN. fig. 48. 49. 50. & 51.

Cum quadrilineum LSADC ad trapetium LADC ſit in proportione compoſita ex ratione, quam habet CQ ad 2. Im, & ex ratione quadrati EF cum triplo quadrati OF ad hoc triplum; atque trapetium LADC ſit ad parall=mum CDV ut CL + AD ad 2 VD vel ut EI + FI ad 2 NI, vel ut FO ad 2. IN, ſivé ut quadratum OF ad duplum rect=li FO. IN, vel potius ut triplum q: FO ad ſextuplum rect=li FO. IN; conſtat igitur quadrilineum LSADC ad parall=mum CDV eſſe in proportione compoſita ex ratione CQ. 2. Im, & ex ratione quadrati EF cum triplo q: OF ad ſextuplum rect=li FO. IN.

Atqui ſolidum deſcriptum circa IF per quadrilineum LSADC ad ſolidum ſimiliter deſcriptum a parall=mo CDV componitur ex ratione 2. Im. CQ, & ex ratione quadrilinei LSADC ad (1) parall=mum CDV, compoſita (ut vidimus) ex ratione CQ. 2. Im; & ex ratione quadrati EF cum triplo q: OF ad ſextuplum rect=li FO. IN, patet igitur ſolidum quadrilinei LSADC ad ſolidum parall=mi CDV eſſe ut q: EF cum triplo q: OF ad ſextuplum rect=li OF. IN &c. [1] ex ſupp. 2.

THEOREMA XV. Propoſitio 17.

SI recta linea AG *contingens conicæ ſectionis curvam in termino* A *alterius ordinatæ* AB *ad aliquam diametrum* XZ, *claudat cum alia ordinata* GEF, *& cum ipſa curva trilineum* GADE *jacens ad alteram partem ipſius diametri.* fig. 55. 56 & 57

Idem trilineum GADE *eandem proportionem habebit ad triangulum* GAE, *quam* GF + ER *ad triplum intervalli, ordinatis paralleli (puta intervalli* OF*) quo ipſa diameter recedit a centro gravitatis prædicti trilinei.*

Ab ordinata EF ſumatur ſegmentum FH ſe habens ad GF ut
GF + EF ad 2FB; quatenus quadratorum GF . EF differentia du-
plo rect=li HFB adæquetur, ſuperficieſque circa XZ, genita
per rectam GE, ſuperficiei cylindricæ, circa AB deſcriptæ a
(1) ex n. 7. & 8. ſupp. 1. recta FH ſit (1) æqualis: & completo triangulo HBF, ſecetur
ejuſdem latus FB in I ita ut ſegmentum IF ſit ipſius FB ſubtri-
(2) ex Archimede de æquipond. l. 1. prop. 14. plum, ac propterea in eodem latere æquilibrii centrum tri=li
HBF (2) ſit idem punctum I.

Et ordinata poſtmodum quacumque recta CDVKL, trilineum
GADE, ac triangula GAE . HBF ſecante, quadratorum GF . EF
[3] ex conic. elem. differentia ſe habebit (3) ad differentiam quadratorum CK . DK ut
quadratum GA ad quadratum CA, vel ut quadratum FB ad quadra-
tum KB, ſive ut rect=lum HFB ad rect=lum LKB: & cum (per
conſtrutionem) duplo rect=li HFB adæquetur differentia qq.
GF . EF, neceſſe eſt quadratorum CK . DK differentiam duplo
rect=li LKB parem eſſe, & conſequenter ſuperficiem deſcriptam
circa diametrum XZ per rectam CD æquari cylindricæ ſuper-
ficiei circa BA genitæ a recta KL ubique, ſolidumque circa XZ
progenitum a trilineo GADE ſolido circa BA procreato per tri=
lum HBF eſſe quidem æquale; quapropter trilineum GADE ad
(4) ex n. 4. ſupp. 2. tri=lum HBF erit (4) reciproce ut diſtantia IB ad diſtantiam
OF, vel ut 3.IB, ſeu 2FB ad 3OF: triangulum autem HBF eſt
ad tri=lum GAE ut FH ad GE, vel (ob conſtrutionem) ut
GF + EF ad 2FB: trilineum ergo GADE ad tri=lum GAE erit
ex æquo perturbate ut GF + EF ad 3OF. Quod, &c.

COROLLARIUM.

Unde eſt quod bilineum ADE ſe habebit ad tri=lum GAE ut
eſt ad 3OF ipſius exceſſus ſupra GF + EF.

THEOREMA XVI. Propoſitio 18.

fig. 58. 59. & 60. *SI recta linea* AGR *tranſiens per terminos duarum ſemiordi-
natarum* AB . RT *ad diametrum* XZ *ſectionis conicæ, clau-
dat cum curva ejuſdem ſectionis, & cum alia ordinata* EGF
trilineum EDAG, *jacens ad alteram partem ipſius diametri,*

Hoc

Hoc trilineum EDAG *erit ad tri=lum* EAG *ut rect=lum ſub* AR + 2GR *in* EF + FG *ad ſextuplum rect=li ſub* GR *in intervallum* (*puta* OF) *ordinatis parallelum, quo ipſa diameter* XZ *recedit a centro gravitatis ejuſdem trilinei.*

Producatur EF, fiatque FH ad GE ut EF + FG ad 2FT; quatenus duplum rect=li HFT differentiæ quadratorum EF, GF adæquetur, atque completo tri=lo HBF, abſcindatur a latere BF ſubtripla pars IF, adeout in ipſo latere punctum I ſit [1] ejuſdem tri=li centrum æquilibrii: & ordinetur quælibet recta DCKL, quæ trilineum EDAG, triangulumque HBF ſecet. (1) *ex Archim. de æquepond. l. 1. pr. 14.*

Et quia quadratorum EF, GF differentia (2) eſt ad differentiam qq: DK. CK ut rect=lum RGA ad rect=lum RCA, vel ut rect=lum TFB ad rect=lum TKB, ſive ut rect=lum HFT ad rect=lum LKT: duploque rect=li HFT æquatur (per conſtrutionem) differentia qq: EF. GF, etiam differentiæ qq: DK CK æquari debet duplum rect=li LKT, ſuperficiemque circa BF genitam a recta DG ſuperficiei cylindricæ a recta KL circa KT procreatæ adæquari (3) ubique; ſolidumque circa BF factum a trilineo EDAG ſolido circa TR procreato per triangulum HBF; unde trilineum EDAG ad tri=lum HBF (4) erit reciproce ut diſtantia IT ad diſtantiam OF, vel ut 3.IT ad 3OF; nempe ut BT + 2FT ad 3.OF. (2) *ex conicis elem.* (3) *ex n. 7. & 8. ſupp. 1.* (4) *ex n. 4. ſupp. 2.*

Atqui tri=lum HBF eſt ad tri=lum GAE ut FH ad GE, vel (ob conſtrutionem) ut EF + GF ad 2TF. proportio igitur trilinei EDAG ad tri=lum EAG componetur ex ratione BT + 2TF. 3OF, & ex ratione EF + FG. 2TF, vel potius componetur ex ratione EF + FG. 3OF, & ex ratione BT + 2TF. 2TF ſeu ratione AR + 2GR. 2GR, & adæquabitur rationi, in qua eſt productum ab AR + 2GR in EF, FG ad productum a 2GR in 3FO, nempe ad ſextuplum rect=li OF. GR. Quod &c.

THEO-

THEOREMA XVII. Propoſitio 19.

fig. 61. 62. 63. & 64.

IN ſectione conica, ſi recta linea AC *jungens terminos duarum ſemiordinatarum* AZ. CX *ad eamdem partem diametri* XZ *claudat bilineum* AKBC, *dimidieturque tam ab alia ordinata* HKG, *quam a bilinei diametro* BH,

Hoc bilineum AKBC *ſe habebit ad rectilineum* ACXZ, *ut quadratorum* HG. KG *differentia ad ſeſquialterum rect=li. ſub* AZ + CX *in intervallum* QR (*ordinatis parallelum*) *quo bilinei centrum gravitatis* Q *abeſt a prædicta diametro* XZ.

Concipiatur bilineum ABC eſſe parabolicum, aut hyperbolicum in duabus primis figuris, ellipticum vero in reliquis, & amplius jacere ad alteram partem diametri XB *in fig.* 61. 62. *&* 63; ſed non ita *in* 64. *figura*, in quo caſu ipſum bilineum AKBC ſemiellipſe majus erit.

In priori caſu, in ordinata KG ſumatur ſegmentum GM potens quadratorum KG. HG differentiam, nempe medium proportionale inter ſummam, & inter differentiam ipſarum KG. HG, & completis parall=mis MGXN. MGZO, trianguloque OGN, ordinetur quæcumque alia recta FEIVT ad diametrum XZ, & ab ejuſdem tri=li diametro GM abſcindatur tertia pars PM, quatenus P (1) ſit centrum gravitatis ipſiuſmet trianguli.

(1) *per Archimedem de æquepond l.1. pr.14.*

Et cum quadratorum KG. HG differentia ad differentiam qq: EI. EI ſit, ex conicis elem. ut rect=lum CHA ad rect=lum CEA, ſive ut rect=lum NMO ad rect=lum NTO, vel potius (2) ut q: GM ad differentiam qq: IT. IV; hæc differentia differentiæ qq: FI. EI par erit (quandoquidem GM poteſt, ex conſtructione, differentiam qq: GK. GH) & inter ſe (3) æquabuntur ſuperficies circa XZ genitæ a rectis EF, TV ubique; & pariter inter ſe æqualia erunt ſolida circa XZ, genita a bilineo ABC, & a tri=lo OGN; bilineumque ABC ad tri=lum OGN erit (4) reciproce ut diſtantia PG ad diſtantiam RQ, vel ut GM ad $\frac{3}{2}$ QR: ſed tri=lum OGN eſt ad rectilineum ACXZ ut GM ad AZ + CX; bilineum igitur ABC ad rectilineum ACXZ erit in proportione compoſita ex ratione GM. $\frac{3}{2}$ QR, & ex ratione GM. AZ + CX ſcilicet ut

(2) *Eucl. l.2 p.5. & l.6.p.2.*

(3) *ex n. 5 ſupp. 1.*

(4) *ex n. 5 ſupp. 2.*

q: GM

Digitized by Google

q: GM, ſeu differentia qq: KG . HG ad ſeſquialterum rect=li ſub RQ in AZ + CX.

In poſteriori caſu ſi a centro gravitatis S bilinei AVC, quo datum bilineum AKCB differt ab integra ellipſe, ordinetur recta ST ad diametrum XZ: & cum ejuſdem ellipſis compoſitæ ex duobus bilineis ABC . AVC, centrum gravitatis idem ſit cum centro G figuræ, & conſequenter ſit in diametro XZ; bilineum ABC ad bilineum AVC erit (1) reciproce ut diſtantia ST ad diſtantiam RQ, vel ut ſeſquialterum ad ſeſquialterum ſive ut $\frac{3}{2}$ ST in AZ + CX ad $\frac{3}{2}$ RQ in AZ + CX: atqui ex præcedenti caſu bilineum AVC eſt ad rectilineum AZCX, ut quadratorum HG . KG differentia ad $\frac{3}{2}$ ST in AZ + CX; ex æquo igitur perturbate, bilineum ABC erit ad rectilineum ACXZ ut differentia qq: HG . KG ad $\frac{3}{2}$ RQ in AZ + CX. Quare, &c. *fig. 64.* (1) *ex mechanicis.*

COROLLARIUM

Sectionis conicæ ſegmentum ABCXZ jacens ad alteram partem diametri XZ ſe habebit ad rectilineum ACXZ, ut differentia qq: HG . KG cum ſeſquialtero producti ab RQ in AZ + CX ad hoc ſeſquialterum. *fig. 61. & 63.*

Idem ſegmentum ABCXZ ad rectilineum ACXZ ſe habebit ut defectus differentiæ qq: HG . KG a ſeſquialtero producti RQ in AZ + CX ad hoc ſeſquialterum. *fig. 62.*

THEOREMA XVIII. *Propoſitio* 20.

Conicæ ſectionis ſemiportio ABCZ *ſe habet ad tri=lum* AXZ *inſcriptum, ut rect=lum* ZCN *ſub diametrum* ZC *in parametrum* CN *cum ſextuplo rectanguli baſis* AZ *in diſtantiam* QR *ipſius diametri a centro gravitatis bilinei* ABC *ordinatis parallelam, ad hoc ſextuplum.* *fig. 65. 66. 67.*

A termino N parametri CN, ordinatis paralleli, ducatur ea linea recta NMO, quam regulam vocat *præclariſſimus Viviani* præceptor meus, in ſua *Divinatione de Maximis, & Minimis, quæ*

bali

Digitized by Google

baſi AZ occurrat in O; ordinatæque KHG diametrum CZ dimidianti occurrat in M, & a vertice C agatur recta CSO, &c.

Jam rect=lum SM, GC ſubquadruplum eſt rect=li ZCN; quandoquidem SM ſubdupla eſt parametri CN, & GC ſub dupla diametri CZ. Et quia quadratum AZ, ob regulam NO æquatur rect=lo OZC, atque proportio quadrati AZ ad qaudratum HG conſimilis eſt rationi quadrati ZC ad quadratum GC, vel rect=li OZC ad rect=lum SGC; etiam quadratum HG æquabit rectangulum SGC: ſed quadratum KG, ob regulam NO, par eſt rect=lo MGC; differentia igitur quadratorum KG. HG æqualis erit rect=lo MS. GC, & ſubquadrupla rect=li ZCN.

(1) *ex præced. prop.* Unde proportio bilinei ABC ad tri=lum, ſeu rectilineum ACXZ, quæ conſimilis (1) eſt rationi, in qua eſt differentia qq: KG. HG ad ſeſquialterum rect=li ſub RQ in AZ + CX, nempe rect=li RQ. AZ; ſimilis erit etiam rationi, quam habet quadruplum illius differentiæ ad quadruplum hujus ſeſquialteri, ſcilicet rationi rect=li ZCN ad ſextuplum rect=li AZ. QR. Et componendo patet quod proponitur.

SCHOLIUM I.

fig. 65. Si conica ſectio ſit parabolica, reperietur ſemiparabolam ABCZ tri=li ACZ eſſe ſeſquitertiam.

(2) *ex conic. elem.* Nam in hoc caſu bilinei ABC diameter BH (in quo eſt centrum gravitatis ipſius bilinei) diametro XZ æquidiſtat [2] ideoque diſtantia QR æquat GH, vel potius ſubdupla eſt baſis AZ; atque proportio bilinei ABC ad tri=lum ACZ, quæ ſimilis eſt rationi rect=li ZCN, ſeu quadrati AZ ad ſextuplum rect=li AZ. QR, vel ad triplum q: AZ, conſimilis erit rationi AZ. 3AZ, ſcilicet rationi ſubtriplæ; & componendo conſtat. Quod, &c.

SCHOLIUM II.

fig. 67. Si area ABCZ ſit ellipſis, aut circuli quadrans, ipſius proportio ad tri=lum ACZ ſimilis erit rationi, in qua eſt AZ + 3QR ad 3QR.

Cum

Cum rect=lum ZCN, in hoc caſu, duplum ſit rect=li OZC, ſeu quadrati AZ; proportio quadrantis ABCZ ad tri=lum ACZ, quæ æquatur rationi rect=li ZCN cum ſextuplo rect=li AZ. QR ad hoc ſextuplum, conſimilis erit quoque rationi, in qua eſt duplum q: AZ cum ſextuplo rect=li AZ. QR ad hoc ſextuplum, vel potius rationi 2AZ+6QR. 6QR, ſeu rationi AZ+3QR. 3QR.

LEMMA III. Propoſitio 21.

SI duo latera CH. BE *utriuſque ex duobus quadrilateris* CBEH. cbeh *inter ſe ſint parallela, & in ipſas incidat recta normalis* MK. fig. 68. 69. 70.

Proportio ſolidi, circa latus BE, *deſcripti per quadrilineum* CBEH *ad ſolidum, circa latus* be, *progenitum a quadrilatero* cbeh, *componetur ex ratione* BE+2CH. be+2ch, *& ex ratione duplicata rationis* MK. *mk*.

A latere CH utriusque quadrilateri abſcindatur ſegmentum CG, quod reſpective æquet BE+2CH, & compleatur tri=lum GBC; & in latere CB ſumatur tertia pars CV; quatenus in ipſo latere CB, punctum V ſit (1) æquilibrii centrum tri=li GBC; ſumaturque ſegmentum quoque CN ſe habens ad reſiduum NB ut CH+2BE ad BE+2CH; quatenus in ipſo latere CB punctum N ſit æquilibrii centrum quadrilateri CBEH. (1) *ex Archimede de æquepond. l. 1. pr.* 14.

Et cum NC ad NB ſit ut CH+2BE ad BE+2CH, erit NB ad BC ut BE+2CH ad 3CH+3BE; at CB ad CV eſt in tripla proportione, ſcilicet ut 3CH+3BE ad CH+BE; erit ex æquo NB ad VC, ut BE+2CH ad BE+CH, vel ut CG ad BE+CH.

Quare cum NB ad VC ſit reciproce ut CG ad BE+CH, vel ut tri=lum GBC ad quadrilaterum CBEH, ſolidum circa BE, genitum a quadrilatero CBEH (2) æquabitur ſolido circa CG, progenito per tri=lum GBC, & ſe habebit ad ſolidum procreatum circa *be*, a quadrilatero *cbeh*, ut prædictum ſolidum tri=li GBC ad ſolidum, circa *cg*, deſcriptum a triangulo *gbc*, videlicet in prop=ne compoſita ex ratione CG. *cg*, vel BE+2CH. *be*+2*ch*, & ex ratione q: MK ad q: *mk*. Unde, &c. (2) *ex n. 4. ſupp. 2*

F THEO-

THEOREMA XIX. Propoſitio 21.

fig. 71. 72. 73. *SEctionis conicæ ſemiportio* AIBC *eſt ad inſcriptum triangulum* ABC, *ut duplum q: baſis* AC *cum rect=lo diametri* CB *in parametrum* BD *ad ſextuplum rect=li ſub baſim* AC *in diſtantiam* CO *ejuſdem diametri* CB *a centro gravitatis ipſius ſemiportionis, quæ diſtantia ordinatis æquidiſtare debet, ut hucuſque ſuppoſuimus.*

Per parametri BD terminum D ducatur ea recta DF, quam regulam appellavimus cum præclariſſimo *Viviani* in demonſtratione propoſitionis 20., & quæ parabolæ diametro æquidiſtat, & in reliquis ſectionibus cum diametro convenit in oppoſito vertice (puta in X). Et huic regulæ DF occurrat in F ordinata AC, & in M quævis alia ordinata IK; quatenus rect=la FCB. MKB reſpectivis qq: AC. IK adæquentur. Poſtmodum agatur recta ELH ipſas CF. KM. BD dimidians, fiatque FG æqualis BE, & completo tri=lo GBC, abſcindatur in latere BC ipſius ſubtriplum CV, ita ut æquilibrii centrum tri=li GBC, reſpectu lateris CB ſit (1) in puncto V.

(1) *ex Archimede lib. 1. de æquipond. pr. 14.*

Et quia FG æquat BE, patet CF + FG æquare BE + 2 CH; ſolidumque, circa latus CG, deſcriptum a tri=lo GCB, æquari ſolido circa BD genito per quadrilaterum CBEH, ut in præcedentis lemmatis demonſtratione indicatum eſt.

Et cum qq: AC. IK reſpectivis rect=lis FCB. MKB paria, reſpectivorum rect=lorum HCB. LKB dupla eſſe debeant; ſuperficies circa BC genitæ a rectis AC. IK cylindricis ſuperficiebus circa BD, deſcriptis per rectas CH. KL reſpective [2] adæquabuntur, ſolidumque circa CB factum a ſemiportione AIBC, ſolido, circa BD genito per quadrilaterum HEBC, nempe ſupradicto ſolido tri=li GBC erit æquale: unde ſemiportio AIBC ad tri=lum GBC (3) erit reciproce, ut diſtantia CV ad diſtantiam OC, vel ut CB ad 3 OC.

(2) *ex n. 7. ſupp. 1.*

[3] *ex n. 4. ſupp. 2.*

Præterea ſecando diametrum CB ita in T, ut BT ad CT ſit in ratione rect=li CBE ad q: AC, vel ad huic æquale rect=lum BCF, ſcilicet ut BE, ſeu GF ad FC; componendo, erit BC ad CT, ut GC ad CF, ac rect=lum GCT rect=lo FCB,

aut q:

Digitized by Google

aut q: CA æquale erit, proindeque AC ad CT ſe habebit, ut GC ad AC, ſive ut tri=lum GCB ad tri=lum ABC; quamobrem proportio ſemiportionis AIBC ad triangulum ABC, quæ componitur ex ratione areæ AIBC ad tri=lum GBC (ſeu ratione CB . 3 CO) & ex ratione tri=li GBC ad tri=lum ABC (ſive ratione AC . CT) componetur etiam ex ratione AC . 3 CO, & ex ratione CB . CT, vel (ob conſtructionem) ratione rect=li CBD cum q: AC ad q: AC, vel rect=li DBC cum duplo q: AC ad hoc duplum q: AC, & æquabitur rationi quam habet productum ab AC in rect=lum CBD cum duplo q: AC ad productum a 3 CO in duplum q: AC, vel potius rationi rect=li CBD cum duplo q: AC ad ſextuplum rect=li ACO, &c.

COROLLARIUM I.

Semiportio parabolica AIBC ad tri=lum inſcriptum ABC ſe habebit, ut baſis AC ad duplum intervalli CO, quo diameter abeſt a centro gravitatis ſemiportionis ABC, &c. *fig. 71.*

In hac quippe hypotheſi, quadratum AC æquatur rect=lo CBD, atque proportio ſemiparabolæ AIBC ad tri=lum ABC, quæ æquatur rationi rect=li CBD cum duplo q: AC ad ſextuplum rect=li ACO, ſimilis erit rationi, in qua eſt triplum q: AC ad ſextuplum rect=li ACO, vel in qua eſt AC ad 2 CO.

COROLLARIUM. II.

Hyperbolæ, & ellipſis ſemiportio AIBC erit ad inſcriptum tri=lum ABC, ut rectangulum ex AC in BX + 2 CX ad ſextuplum rect=li XCO. *fig. 72. & 73.*

Nam in hoc caſu regula DF tranſit per verticem oppoſitum X, atque proportio ſemiportionis AIBC ad tri=lum ABC, quam vidimus componi ex ratione AC . 3 CO, & ex ratione rect=li CBD cum duplo q: AC, aut cum duplo rect=li FCB ad duplum q: AC, ſeu rect=li FCB, vel ratione BD + 2 OF . 2 CF, ſeu ratione BX + 2 CX . 2 CX, æquari debet rationi in qua eſt rect=lum ex AC in BX + 2 CX ad ſextuplum rect=li XCO.

Digitized by Google

SCHOLIUM

Altera ſectionis conicæ portio AIBC ad aliam *aibc* proportionem habebit compoſitam ex ratione altitudinis BR ad altitudinem *br*, ex ratione in qua eſt rect=lum diametri CB in parametrum BD cum duplo q: baſis AC ad rect=lum diametri *cb* in parametrum *bd* cum duplo q: baſis *ac*; & ex ratione, quam reciproce habet diſtantia *co* diametri *cb* a centro gravitatis poſterioris ſemiportionis *aibc* ad intervallum diametri CB a centro gravitatis prioris ſemiportionis AIBC.

Jam proportio ſemiportionis AIBC ad ſemiportionem *aibc* quæ componitur ex ratione ſemiportionis AIBC ad tri=lum ABC (ſeu ratione (1) rect=li CBD cum duplo q: AC ad ſextuplum rect=li ACO) ex ratione tri=li ABC ad tri=lum *abc* (ſeu rect=li AC, BR ad rect=lum *ac*, *br*) & ex ratione tri=li *abc* ad ſemiportionem *aibc* (vel ſextupli rect=li *aco* ad rect=lum *cbd* cum duplo q: *ac*) componi debet quoque ex ratione rect=li CBD cum duplo q: AC ad rect=lum *cbd* cum duplo q: *ac*; ex ratione rect=li AC, BR ad rect=lum *ac*, *br*, & ex ratione rect=li *aco* ad rect=lum ACO; vel potius componi debet ex ratione BR. *br*; ex ratione rectanguli CBD cum duplo q: AC ad rect=lum *cbd* cum duplo q: *ac*; & ex ratione *co*. CO, &c.

(1) *ex antec. prop.* 22.

THEOREMA XX. Propoſitio 23.

fig. 74. & 75.

SI conicæ ſectionis portio AIBN *per rectam lineam* BQ *procedentem a vertice* B, *baſimque* AN *diſpeſcentem, dividatur in duo trilinea* AIBQ. NBQ.

Alterum trilineum AIBQ *erit ad inſcriptum tri=lum* ABQ, *ut rect=lum* CBD *ſub portionis diametrum* CB *in parametrum* BD, *cum duplo rect=li* AQN, *ex baſis ſegmentis* AQ. QN *ad ſextuplum rect=li* AQ, OC, *ſub trilinei baſim* AQ *in intervallum* OC (*ordinatis parallelum*) *ipſius diametri* BC *a centro gravitatis ejuſdem trilinei* AIBQ.

Pona-

Ponatur primo trilineum AIBQ eſſe ad alteram partem diametri CB, a qua abſcindatur ipſius tertia pars CV, & per parametri BD terminum D agatur diametri BC regula DF, ut in præcedenti, & per rectam ELH dimidientur rectæ BD. CF, & cujusvis aliæ ordinatæ IKZ ſegmentum KM, fiatque duplum rect=li PCB æquale quadrato CQ, & completo tri=lo PBC, fiat XH æqualis HP, & XG ſemiparametro BE; claudaturque tri=lum GBP, cujus centrum æquilibrii reſpectu rectæ BC (1) erit in puncto V; ſolidumque, circa GP genitum ab hoc tri=lo GBP æquabitur (2) ſolido, circa BD procreato per quadrilineum PBEH. His poſitis *fig. 74.* *(1) ex Archimede de æquipond. l. 1. pr. 14.* *(2) ex demonſtratione lem. 3. pr. 21.*

Cum q: AC rect=lo FCB (ob regulam DF) ſeu duplo rect=li HCB ſit æquale, quadratumque CQ duplo rect=li PCB, per conſtrutionem, adæquetur; quadratorum AC. QC differentia duplo rect=li HP, CB erit quidem æqualis: ſimiliterque duplo rect=li LR, KB æqualis invenitur quadratorum IK. SK differentia: quare ſuperficies, circa BC genitæ a rectis AQ. IS, ſuperficiebus, circa BE procreatis per reſpectivas rectas PH. RL (3) æquabuntur ubique: ſolidumque circa CB factum a trilineo AIBQ ſolido circa BD genito per quadrilineum HPBE, vel potius ſolido, circa GP deſcripto per tri=lum GBP par erit; ideoque trilineum AIBQ ad tri=lum GBP ſe reciproce (4) habebit ut diſtantia VC ad diſtantiam OC, vel ut CB ad 3 CO. *(3) ex n. 8. ſupp. 1.* *[4] ex n. 4. ſupp. 2.*

Ulterius ſecando diametrum BC ita in T, ut BT ad TC eamdem habeat rationem, quam rect=lum CBD ad duplum rect=li AQN; componendo efficietur relatio BC. TC ſimilis rationi rect=li CBD cum duplo rect=li AQN ad hoc duplum.

Rurſus cum TB ad TC ſit ut rect=lum CBD ad duplum rect=lum AQN, vel ut rect=lum CBE ad rect=lum AQN, ſeu ad duplum rect=li HP, CB (etenim per quintam 2. Elem. rectangulum AQN æquatur q: AC minus q. QC, ſeu, per ſupradicta, rectangulo FCB minus 2 PCB, ſeu 2 HCB minus 2 PCB, vel demum 2 HP in CB) ſive ut EB ad 2 PH, vel ad XP, vel potius ut GX ad XP ex ſuppoſitione; componendo orietur relatio BC. CT milis rationi GP. XP; rect=lumque GP, TC rect=lo XP, CB, vel rect=lo AQN æquabitur; atque proportio GP. AQ, vel tri=li GBP ad tri=lum ABQ rationi NQ. CT aſſimilabitur; atque proportio trilinei AIBQ ad tri=lum ABQ, quæ com-

poni-

Digitized by Google

ponitur ex ratione trilinei AIBQ ad triangulum CBP [ſeu ratione CB. 3 CO] & ex ratione tri=li CBP ad tri=lum ABQ (vel ratione NQ. CT) componetur quoque ex ratione NQ. 3 CO (ſeu ratione 2 AQ in NQ ad 2 AQ in 3 CO) & ex ratione BC. CT, ſeu (ob conſtructionem) ratione rect=li CBD cum duplo rect=li AQN ad hoc duplum; quæ rationes componunt rationem rectanguli CBD cum duplo rectanguli ANQ ad ſextuplum rect=li AQ. CO.

fig. 75. Detur nunc trilineum AIBQ non reperiri totum ad alteram partem diametri CB, & ſubſequenter trilineum QBZN, quo illud deficit ab integra portione AIBZN, jacere ad alteram partem ipſius diametri CB. Et quia in diametro BC exiſtit centrum gravitatis ejuſdem integræ portionis AIBZN nempe aggregati duorum ſimul bilineorum AIBQ. QBZN; ſi ponatur VC eſſe diſtantiam diametri BC a centro gravitatis trilinei QBZN, ordinatis parallelam; trilineum AIBQ ad trilineum QBZN (1) erit reciproce ut diſtantia CV ad diſtantiam CO, vel ut ſextuplum rect=li NQ. CV ad ſextuplum rect=li NQ. CO; ſed trilineum QBZN ad inſcriptum tri=lum QBN eſt (ex præcedenti caſu) ut rect=lum CBD cum duplo rect=li AQN ad ſextuplum rect=li NQ. CV; atque tri=lum NQB eſt ad tri=lum AQB ut NQ ad AQ, vel ut ſextuplum rect=li NQ. CO ad ſextuplum rect=li AQ. CB; patet ex æquo perturbate trilineum AIBQ ad tri=lum ABQ eſſe ut rect=lum CBD, cum duplo rect=li AQN ad ſextuplum rect=li AQ. CO. &c.

(1) *ex Mechanicis.*

THEOREMA XXI. Propoſitio 24.

fig. 76. *SI conicæ ſectionis ſemiportionem* DEFI *contingat, in termino* E *ordinatæ* KE *biſecantis diametrum* FI, *recta linea* EB, *quæ cum ipſa diametro producta conveniet in aliquo puncto* B, *a quo ad baſis* DI *terminum* D *ducta ſit recta* DB.

I. Semiportio DEFI *ſe habebit ad tri=lum* DBI *ut ipſa baſis* DI *ad triplum intervalli* TI *(ordinatis paralleli) quo ipſa diameter* IF *abeſt ab ipſius ſemiportionis centro gravitatis.*

II Solidum, circa diametrum FI *genitum a ſemiportione* DEFI *æquabitur ſolido ſimiliter progenito per tri=lum* DBI.

Pro-

Digitized by Google

Protrahatur tangens BE ut compleat tri=lum ABI, & ordinata per verticem F recta ES compleatur tri=lum SKF, ipſique ſimile, & æquale VKI, & ordinetur quæcumque recta MONP.

Et cum q: SF ad differentiam qq: AI . DI (1) ſe habeat ut q: SE ad q: AE vel ut q: FK ad q: KI, vel ut q: SF ad q: VI; differentia qq: AI . DI quadrato IV æqualis erit, atque ſuperficies circa IF deſcriptæ per rectas AD . VI inter ſe (2) æquabuntur; parique modo ſuperficies genitæ per rectas OM . NP inter ſe æquales ubique reperientur: unde colligitur, quod exceſſus ſolidi deſcripti circa IB per tri=lum ABI ſupra ſolidum ſimiliter factum à ſemiportione DEF ſummæ ſolidorum ſimiliter procreatorum a triangulis VKI . KSB æquiparabitur. [1] ex conic. elem. (2) ex n. 5. ſupp. 1.

Præterea proportio, quam habet prædictum ſolidum tri=li ABI ad ſolidum tri=li VKI componitur ex ratione BI . IK, ſeu ratione producti ab IB in q: IK ad cubum IK, & ex ratione q: AI ad q: VI, vel ad differentiam qq: AI . DI.

Atque proportio, in qua eſt hoc ſolidum tri=li VKI ad ipſum ſolidum unà cum ſolido tri=li SBK facile reperitur conſimilis rationi cubi KI ad parall=dum q: KI in BI.

Prædictum igitur ſolidum tri=li ABI ad duo ſimul ſolida tri=lorum VKI . SBK, nempe ad illius ſolidi ABI exceſſum ſupra ſodum ſemiportionis DEFI, ſe habebit in prop=ne compoſita ex ratione q: AI ad differentiam qq. AI . DI; ex ratione producti a q. IK in BI ad cubum IK, & ex ratione hujus cubi ad illud productum; ſcilicet ſe habebit ut q. AI ad ipſius exceſſum ſupra q. DI. Et per converſionem rationis idem ſolidum tri=li ABI erit ad ſolidum ſemiportionis DEFI, ut q: AI ad q: DI, ſive ut idem ſolidum tri=li ABI ad ſolidum tri=li DBI, cui proinde adæquabitur ſolidum ſemiportionis DEFI. [3] ex n. 4. ſupp. 2.

Quapropter ſemiportio DEFI ad tri=lum DBI (3) erit reciproce, ut lateris BI intervallum a centro gravitatis tri=li DBI, nempe (4) ut ſubtriplum lateris DI, ad intervallum TI, vel potius ut DI ad 3TI. Unde, &c. (4) ex Archim. de æquip. l. 1 pr. 14.

LEM-

Digitized by Google

LEMMA IV. Propoſitio 25.

fig. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. & 88. D*Atis duabus rationibus* a . b ; d . e : *ſi prima* GH *trium rectarum* GH . IH . KH *ſit ad ſecundam* IH *in ratione* a . b, *& ad tertiam* KH *in ratione* d . e, *& amplius ſecunda* IH, *& tertia* KH *communem habeant terminum* H, *& in eadem recta ſint conſtituta, atque in hac recta datum ſit punctum* O, *ita ut* IO *ad* OK *ſit ut antecedens* d *poſterioris* d e *ad antecedentem prioris rationis* a . b.

fig. 77. & 78. *I. Dico, quod ubi punctum* O *dividat differentiam* IK *poſteriorum rectarum* IH . KH; *erit* GH *ad* HO *ut ſumma antecedentium* d *&* a *ad ſummam conſequentium terminorum* e *&* b.

fig. 79. 80. 81. 82. 83. & 84. *II. Dico, quod ſi punctum* O *ſit in prædicta differentia* IK *producta; erit* GH *ad* HO *ut differentia antecedentium* d *&* a *ad differentiam conſequentium terminorum* e *&* b.

fig. 85. & 86. *III. Dico, quod quoties punctum* O *dividat aggregatum* IK *poſteriorum rectarum* IH . KH; *erit toties* GH *ad* HO *ut ſumma antecedentium* d *&* a *ad differentiam conſequentium terminorum* e *&* b.

fig. 87. & 88. *IV. Dico, quod ubi punctum* O *ſit in ipſo aggregato* IK *producto; erit* GH *ad* HO *ut differentia antecedentium* d *&* a *ad ſummam conſequentium terminorum* e *&* b.

Inclinetur GH ad aliquem angulum rectæ, in qua exiſtunt ipſæ IH . KH, & junctæ GK ducatur ab I parallela IP, conveniens cum juncta GO in P, atque ex I . P ſint IM . PM ipſis GH . IO æquidiſtantes.

Jam, ob ſimilitudinem tri=lorum IMP . GHK, erit IM ad GH ut IP ad GH, vel ut IO ad OK, ſive (ob hypotheſim), ut *d* ad *a*.

Et ſumma (in duabus primis figuris) ac differentia (in ſex ſequentibus) terminorum IM . GH (nempe GN) ad conſequentem GH erit ut ſumma quidem, aut differentia ipſarum *d*. *a* ad *a*.

Quia vero MP ad MI eſt ut KH ad HG, vel (ob hypotheſim) ut *e* ad *d*; & IM ad GH eſt ut *d* ad *a* (ut mox vidimus) poniturque GH ad IH ut *a* ad *b*; erit ex æquo MP ad

ad MH, ut *e* ad *b*, atque ſumma in prioribus; atque differentia in poſterioribus figuris, terminorum MP. IH (puta NP) ad conſequentem IH, ut ſumma pariter, aut differentia ipſorum *e* . *b* ad *b*.

Sed OH ad HG, per hypotheſim, ſe habet ut *b* ad *a*, & HG ad NG eſt ut *a* ad ſummam, aut differentiam ipſorum *d* . *a* (ut ſupra oſtenſum eſt) ergo ex æquo NP ad NG, vel potius HO ad HG, erit ut ſumma, ſeu differentia conſequentium *e*, & *b* ad ſummam, ſeu differentiam antecedentium terminorum *d* & *a*; unde convertendo conſtat quod primo, & ſecundo loco proponebatur. Eodemque progreſſu, mutatis mutandis, oſtendetur in reliquis figuris, quod tertio, ac quarto loco dicitur.

THEOREMA XXII. Propoſitio 26.

SI recta linea AE *in duas parabolæ diametros* AB . DE *incidens parabolicam curvam non ſecet inter ipſas diametros, claudat autem parabolicum ſpatium* ABCDE; *& amplius recta linea* BD, *vertices jungens earundem diametrorum, (& quæ ad alium diametrum, puta* NOC, *ordinata erit) claudat cum illa incidente* AE, *& inter illas diametros* AB . DE *rectilineum* ABDE; *atque recta linea* DQ *ducta per verticem* D *alterius* DE *harum diametrorum æquidiſtet prædictæ incidenti, clauditque parallelogrammum* AQDE. fig. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. & 97.

I. Parabolicum ſpatium ABCDE *ſe habebit ad rectilineum* ABDE *ut oppoſitarum baſium* AB . DE *ſumma cum quadruplo abſciſſæ* CN *ad triplum earundem baſium ſimul ſumptarum.*

II. Et ſe habebit ad parallelogrammum AQDE *ut prædictarum baſium* AB . DB *aggregatum, cum quadruplo prædictæ abſciſſæ* CN *ad ſextuplum baſis* DE *ipſius parallelogrammi.*

III. Incidens ſupradicta AB *ad ſibi parallelum intervallum, quo altera* AB *oppoſitarum baſium abeſt a gravitatis centro parabolici ſpatii* ABCDE, *erit ut earundem baſium* AB . DE *ſummæ cum quadruplo abſciſſa* CN *ad reliquam baſim* DE *cum dupla ipſius abſciſſæ* CN.

Jam bilineum parabolicum BCD (1) eſt ad triangulum BCD ejuſdem baſis, & altitudinis, in proportione ſeſquitertia, ſicilicet [1] per coroll. prop. 2.

ut 4CO ad 3CO; tri=lum vero BCD ad rectilineum ABDE eſt ut 3CO ad AB + DE + 4NO; ex æquo igitur bilineum BCD erit ad rectilineum ABDE ut 4CO ad AB + DE + 4NO; ac propterea parabolicum ſpatium ABCDE ſe habebit ad rectilineum ABDE ut AB + DE + 4NC ad AB + DE + 4NO, vel potius ad 3AB + 3DE; quippe qui 2ON æquat AB + DE. Patet igitur prima concluſio.

Hoc autem rectilineum ABDE eſt ad parall=mum EAQD ut 3AB + 3DE ad 3AQ + 3DE, ſive ad 6DE; ex æquo iterum parabolicum ſpatium ABCDE ad parall=mum EAQD erit ut AB + DE + 4CN ad 6DE. Quare conſtat ſecunda concluſio.

Præterea cum parabolici bilinei BCD centrum gravitatis ſit in diametro CO, punctum N in recta AE erit ejuſdem bilinei centrum æquilibrii, ac proportio AE : AN erit dupla.

Deinde ſi fiat EI ad IA ut DE + 2AB ad AB + 2DE, punctum I in ipſa recta AE, erit (1) rectilinei ABDE centrum æquilibri, atque relatio EA . AI ſimilis erit rationi 3DE + 3AB . AB + 2DE, vel rationi 6ON . DE + 2NO.

(1) ex Archim. de æquip.

At ſi in eadem recta AE ponatur P eſſe parabolici ſpatii ABCDE centrum æquilibrii; erit [2] NP ad IP, ut rectilineum ABDE ad bilineum BCD, ſive ut AB + DE + 4NO ad 4CO, ſive ut 6NO ad 4CO.

[2] ex Mechan.

Conſiderentur nunc duæ proportiones, quarum prima ſit ratio 4CO . 2CO, cui adæquatur relatio AE . AN, ſecunda vero ſit relatio 6NO . ED + 2NO, cui conſimilem eſſe agnovimus rationem EA . AI; & animadvertatur inſuper, quod NP ad IP eſt ut 6NO ad 4CO, videlicet ut antecedens ſecundæ ad antecedentem primæ earundem rationum; rebusque ſic ſtantibus concludetur [per præcedens lemma] quod EA ſe habebit ad AP [nempe ad intervallum ipſi AE parallelum, quo baſis AB recedit a centro gravitatis parabolici ſpatii ABCDE] ut ſumma, *in figur. 89. 92. 93.* & ut differentia (in reliquis) eorundem antecedentium, ad ſummam quidem, aut differentiam conſequentium terminorum, id eſt ut 6NO + 4CO ad ED + 2NO + 2CO, videlicet ut AB + DE + 4CN ad ED + 2CN. Quod tertio loco, &c.

CO-

COROLLARIUM.

Ex progreſſu demonſtrationis habetur, quod proportio incidentis AE ad ſegmentum AI (nempe ad intervallum, eidem AE parallelum, quo gravitatis centrum rectilinei ABDE recedit ab altera baſe AB) conſimilis eſt rationi, quam habet 6NO ad DE+2NO, vel rationi in qua eſt DE+AB+4NQ ad DE+2NO.

SCHOLIUM I.

Proportio, quam habet parabolicum ſpatium ABCDE, in altero ex novem appoſitis ſchematibus, ad ſpatium parabolicum *abcde*, in alio ex iiſdem ſchematibus, componetur ex ratione normalis incidentis in oppoſitas baſes AB . DE prioris ſpatii ABCDE ad normalem incidentem in oppoſitas baſes *ab*. *de* poſterioris ſpatii *abcde*, & ex ratione, quam habet AB+DE+4CN ad *ab*+*de*+4*cn*.

Quandoquidem proportio ſpatii ABCDE ad ſpatium *abcde* compoſita eſt ex ratione ſpatii ABCDE ad parall=mum AQDE, ſeu ratione AB+DE+4CN . 6DE; ex ratione parall=mi AQDE ad parall=mum *aqde* (conſtante ex ratione baſis DE ad baſim *de*, ſeu ratione 6DE : 6*de*; & ex ratione altitudinis ad altitudinem) & ex ratione parall=mi *aqde* ad ſpatium *abdce*, ſeu ratione 6*de*, *ab*+*de*+4*cn*.

SCHOLIUM II.

Solidum deſcriptum circa alteram AB ex oppoſitis baſibus AB . DE parabolici ſpatii ABCDE ab ipſo ſpatio ſe habebit ad ſolidum ſimiliter factum a parall=mo AEDQ, ut baſis DE hujus parallelogrammi cum duplo ipſius CN ad triplum ejuſdem baſis DE.

Illud enim ad hoc ſolidum ſe [1] habet in pro=ne compoſita ex ratione ſpatii ABCDE ad parall=mum AEDQ, ſeu ratione AB+DE+4CN . 6DE, & ex ratione, quam habet duplum diſtantiæ PA rectæ AB a centro gravitatis illius ſpatii (3) *ex* 5.*ſupp*.

Digitized by Google

ABCDE ad AE, ſeu (per tertiam partem præcedentis prop.) quam habet 2 DE + 4 CN ad AB + DE + 4 CN; ideoque ſe habebit ut 2 DE + 4 CN ad 6 DE, vel potius ut DE + 2 CN ad 3 DE, &c.

SCHOLIUM III.

Solidum, quod a parabolico ſpatio ABCDE [in altero ex novem appoſitis ſchematibus] deſcribitur circa baſim AB, erit ad ſolidum genitum a parabolico ſpatio *abcde* (in quocumque alio ex iiſdem ſchematibus) circa baſim *ab*, in prop=ne compoſita ex ratione duplicata rationis, quam habet normalis incidens in oppoſitas baſes AB. DE. prioris ſpatii ABCDE ad normalem incidentem in oppoſitas baſes *ab* . *de* poſterioris ſpatii *abcde*; & ex ratione in qua eſt reliqua baſis DE primi ſpatii cum duplo ipſius CN ad reliquam baſim *de* ſecundi ſpatii cum duplo ipſius *cn*.

Innoteſcit enim ex eo, quod ſolidum genitum circa BA per primum ſpatium ABCDE, ad ſolidum ſimiliter progenitum a ſuo parall=mo AQDE, eſt ut DE + 2 CN ad 3 DE: & hoc ſolidum ad ſolidum deſcriptum circa *ba* per parall=mum *aqde* ſecundi ſpatii *abcde*, eſt (1) in prop=ne compoſita ex ratione DE . *de*, ſeu 3 DE . 3 *de*; & ex ratione, quam habet q. normalis incidentis in baſes DE . QA ad q. normalis incidentis in baſes *de* . *qa*; & hoc ſolidum parall=mi *aqde* ad ſolidum ſimiliter procreatum a ſpatio *abcde* eſt, per præcedens ſcholium, ut 3 *de* ad *de* + 2 *cn*, &c.

(1) ex 2. 1. ſupp. 2.

THEOREMA XXIII. Propoſitio 27.

fig. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 106. 105. 107. 108 & 109.

Data ſemiſectionis conicæ, aut cylindricæ ſegmento AGBED *abſciſſo per duas ordinatas* AD . BE *ad diametrum, cujus diametri pars* DE, *inter ipſas ordinatas comprehenſa dimidietur ab alia ordinata* GF, *per cujus terminum* G *tranſeat recta linea* SGP . *ad ipſam diametrum parallela, claudenſque, inter priores ordinatas* AD . BE, *parall=mum* SPED.

I. So-

I. Solidum genitum circa diametrum DE *a prædicta ſemiſectionis ſegmento* AGBED *ſe habebit ad ſolidum ſimiliter progenitum a prædicto parall=mo* SPED, *ut ſumma quadratorum ex prioribus ordinatis* AD. BE, *quadrupliquc quadrati ex poſteriori ordinata* GF *ad hujus quadrati ſextuplum.*

II. Et ubi prædicta diameter DE *axis fuerit; hæc vero* DE *ad intervallum alterius* BE *ex prioribus ordinatis a centro gravitatis rotundi ſolidi geniti circa eundem axim* DE *a prædicto ſemiſectionis ſegmento* AGBED, *ſe habebit ut ſumma ex quadratis priorum ordinatarum* AD. BE, *& ex quadrato poſterioris ordinatæ* GF *quater ſumpto, ad q: reliquæ* AD *ex prioribus ordinatis cum duplo q: poſterioris* GF.

Dum data ſemiſectio ſit cylindrica, & per axem cylindri, ideoque ipſius ſegmentum AGBED ſit parall=mum, huic omnino congruet parallelogrammum SPED (ut in fig. 98.) & in hoc caſu, jam nota ſunt erudito Geometræ quæ proponuntur.

Si vero ſemiſectio ſit parabolica; a diametri vertice [puta O] ordinetur recta OC, & per rectam lineam CMHK, eidem diametro parallelam completis parall=mis CODH, OMEDH, MEFK, ducatur recta OKZ, ordineturque quævis alia LOTYX, &c. *fig. 99. & 100.*

Et quia ſuperficies genita, circa DE per rectam GF, ad ſuperficiem ſimiliter progenitam per rectam LT eſt (1) ut q: GF ad q: LT, ſive [ob parabolam] ut abſciſſa FO ad abſciſſam TO vel ut FK ad XT ubique; patet ſolidum, circa DE deſcriptum ab area parabolica AGBED eſſe ad ſolidum deſcriptum a parall=mo SPED ut rectilineum ZNED ad parall=mum HM ED, ſcilicet ut DZ + EN + 4 FK ad 6 FK, & per conſequens, ut ſummæ qq: AD. BE quadrupliquc q: GF ad ſextuplum quadrati GF. *(1) ex n. 6. ſupp. 1. & Eucl. prop. 2. lib. 12.*

Si data ſemiſectio ſit triangularis, & a centro ſeu vertice O ordinetur recta OC, & per rectam CKH, diametro DE parallelam, compleantur parall=ma DOCH. EFKM, & circa diametrum OC, ſemiordinatamque CH deſcribatur parabola ZMOIN, verticem habens in O; & ad datæ ſectionis diametrum DE ordinetur qualibet recta LQTYK, &c. ſuperficies, circa DE genita per ordinatam GF, ad ſuperficiem ſimiliter progenitam ab ordinata LT (2) erit ut q: FO ad q: TO, vel (ob parabolam) ut *fig. 101. 102. & 104. (2) ex prop. præced.*

FK ad

FK ad TX ubique: unde ſolidum areæ AGBED ad ſolidum parall=mi SPED ſe habebit ut area parabolica ZKNED ad parall=mum DEMH, nempe [1] ut DZ + EN + 4FK ad 6FK, vel ut ſumma qq: AD . BE, quadruplique q: GF ad ſextuplum q: GF.

[1] *ex prop. præc.*

Dum data ſemiſectio ſit elliptica (*ut in fig.* 103. 105. & 106.) vel ſit ſemihyperbola (*ut in fig.* 107. & 108.) & in utroque caſu oppoſiti vertices reſpectu diametri DE ſint O, R, centrum vero ſit V agatur huic recta VI, ordinatis parallela, & circa diametrum VI, ordinatamque OR deſcribatur parabolica curva RIOZ, cui occurrant in N . K . Z rectæ BE . GF . AD; & completo parall=mo HKMED per rectam HKM ipſi DE parallelam, ordinetur ad diametrum DE quæcumque recta QLTyX, &c.

Jam ſuperficies circa DE genita per ordinatam GF eſt ad ſuperficiem ſimiliter procreatam ab ordinata LT, ut q: GF ad q: LT, vel, ob ſectionem datam, ut rect=lum RFO ad rect=lum RTO; ſive (ob deſcriptam curvam parabolicam) ut FK ad XT ubique; unde prædictum ſolidum deſcriptum ab area AGBED elliptica, aut hyperbolica ad prædictum ſolidum factum a parall=mo SPED eandem proportionem habebit quam parabolica area ZKNED ad parall=mum HMED, videlicet quam DZ + EN + 4KF ad 6KF, & per conſequens ut ſumma qq: AD . BE, quadruplique q: GF ad ſextuplum hujus q: GF.

fig. 109. Dum data ſemiſectio ſit hyperbolica, ejuſque diameter DE ſit ſecunda duarum conjugatarum diametrorum, centrum vero ſit V, & hujus diametri ſemilatus tranſverſum ſit V&, ac propterea q: ſemiordinatæ AD ad quadratum cujusvis aliæ GF ſit perpetuo ut ſumma qq: DV, &V ad ſummam qq: FV, &V. Et a centro V agatur recta VI, ordinatis parall=la, & æquans V&, deſcribaturque circa diametrum VI parabola ZKNI, quæ ordinatas habeat ipſi DE parallelas, verticem in I, parametrumque æqualem ipſi V&, vel VI, atque rectis AD . GF . BE occurrat in Z . K . N quatenus q: FV cum q: V& æquetur rect=lo KF, V& quadratumque DV cum q: V& æquetur rect=lo ZD, V&, ideoque proportio rect=li ZD, V& ad rect=lum KF . V&, ſeu proportio ZD . KF æquetur rationi ſummæ qq: DV . V& ad ſummam qq: FV . V&, & ita ſemper ubicumque fuerit ordinata FK.

Inſu-

Digitized by Google

Inſuper per rectam HKM, diametro DE parallelam compleatur parallel=mum HKFD, parall=mumque KMEE, ordineturque ad diametrum DE quælibet recta QLTyx, &c.

Et quia ſuperficies deſcripta circa DE per ſemiordinatam GF ad ſuperficiem ſimiliter genitam ab ordinata LT eſt ut q: GF ad q: LT, vel (ob hyperbolicam ſectionem) ut ſumma qq: FV. V& ad ſummam qq: TV. V& ſive (ob deſcriptam parabolam, & ob nuper indicata) ut FK ad TX ubique; inde fit quod prædictum ſolidum progenitum ab area AGBED ad prædictum ſolidum factum a parall=mo SPED ſe habebit ut area parabolica ZKNED ad parallelogrammum HMED, videlicet ut ZD + NE + 4KF ad 6.KF, & per conſequens ut ſumma qq: AD.BE quadruplique quadrati GF ad hujus quadrati ſextuplum, quod erat demoſtrandum primo loco.

Hoc ipſum duobus aliis modis ab hoc diverſis, egomet demonſtravi in quodam tractatu meo *de Conicis ſectionibus, & de earundem ſolidis*, in duodecim libros diviſo.

Præterea ubi diameter ED axis fuerit in omnibus oppoſitis figuris, primâ exceptâ, rotundum ſolidum genitum circa axem DE ab area AGBED analogum erit areæ ZKNED; quandoquidem ubique quadratum GF ad q: LT eſt ut KF ad XT; unde axis DE ad intervallum ordinatæ BE a centro gravitatis illius ſolidi eandem (1) habebit proportionem, quam ad ejus ordinatæ BEM diſtantiam a centro gravitatis areæ ZKNED, ſcilicet (2) quam DZ + EN + 4FK ad ZD + 2KF, ſive quam ſumma qq: AD . BE cum quadruplo quadrati GF ad q: AD cum duplo q: GF. Unde, &c.

(1) *ex mechanicis.*

(2) *ex præcedem propoſit. ejuſque cor.*

SCHOLIUM.

Si in duabus ex appoſitis figuris diametri ED, ed ordinatis normales, aut ſimiliter inclinatæ fuerint, reperietur, proportionem ſolidi, circa diametrum DE deſcripti [in altera] per aream AGBED ad ſolidum genitum (in reliqua figura) circa diametrum *de* ab area *agbed*, componi ex ratione diametri DE ad diametrum *de*, & ex ratione, in qua eſt ſumma quadratorum AD . BE, quadruplique quadrati GF ad aggregatum qq: *ad, be* quadruplique quadrati *gf*.

Et

Et inſuper reperietur [ubi duarum ex appoſitis figuris diametri DE . de ordinatis normales fuerint] quod intervallum ordinatæ BE a centro gravitatis rotundi ſolidi geniti (in altera) circa axem DE ab area AGBED ſe habebit ad intervallum ordinatæ be a centro gravitatis rotundi ſolidi procreati [in reliqua figura] circa axem de per aream agbed, in proportione compoſita ex ratione axis DE ad axem de, ex ratione q: AD cum duplo q: GF ad q: ad cum duplo q: gf, & ex ratione, quam reciproce habet ſumma qq: ad . be, quadruplique q: gf ad ſummam qq: AD . BE, quadruplique q: GF.

THEOREMA XXIV. Propoſitio 28.

fig. 110. 111. & 112. *Datis duabus ordinatis* BEX . ADZ *ad communem diametrum* XZ *duarum ſemiſectionum conicarum, aut cylindricarum, abſcindentibus duo ſegmenta* AGBXZ . DIFXZ, *quorum alterum* DIFXZ *comprehendatur a reliquo* AGBXZ. *& amplius recta linea* HK *eidem diametro parallela claudat parall=mum* HKXZ *inter ipſas ordinatas; & alia ordinata* GIF *dimidiet ipſam diametrum* XZ.

I. Annulus genitus, circa diametrum XZ *per differentiam* AGBEFD *prædictorum ſegmentorum* ABXZ . DEXZ *ſe habebit ad ſolidum ſimiliter progenitum a parall=mo* HKXZ *ut differentia quadratorum* AZ . DZ *cum differentia qq:* BX . EX, *& cum quadruplo differentiæ quadratorum* GF . IF *ad ſextuplum q:* HZ.

II. Et ubi diameter XZ *fuerit axis, idem axis* XZ *ſe habebit ad intervallum (puta* XO) *alterius* BX *ex prioribus ordinatis* AZ . BX *a centro gravitatis prædicti annuli ut differentia qq:* AZ . DZ *cum differentia qq:* BX . EX, *& cum quadruplo differentiæ qq:* GF . IF *ad differentiam qq:* AZ . DZ *cum duplo differentiæ qq:* GF . IF.

(1) ex 1. par. ſchol. prop. 27. Iam ſolidum genitum circa XZ, ab area ABXZ (1) eſt ad ſolidum ſimiliter progenitum a parall=mo HKXZ ut ſumma qq: AZ . BX quadrupliquæ q: GP ad ſummam qq: ZH . XK, atque quadrupli q: RB, nempe ad ſextuplum q: ZH. & pariter ſolidum procreatum ab area DEXZ ad ipſum ſolidum parall=mi

HKXZ eſt ut ſumma qq. DZ.BX, qudruplique q. IF ad ſextuplum q. HZ. Annulus igitur procreatus ab area AGBEID ad idem ſolidum parall=mi HKXZ eamdem proportionem habebit, quam differentia qq. AZ.DZ cum differentia qq. BX.BX, & cum quadruplo differentiæ qq. GF.IF ad ſextuplum q. ZH.

Ponatur nunc, diametrum XZ eſſe axem, & VX eſſe diſtantiam ordinatæ BX a centro gravitatis rotundi ſolidi geniti circa axem XZ ab area DIEXZ; quatenus ZX ad XV (1) ſe habeat in prop=ne, in qua eſt ſumma qq. DZ.EX, quadruplique q. IF ad quadratum DZ cum duplo q. IF.

(1) ex prima parte ſchol. prop 27.

Ponaturque RX eſſe diſtantiam ipſius ordinatæ BX a centro gravitatis rotundi ſolidi circa axem XZ deſcripti ab area AGBXZ; quatenus ZX ad XR ſit (2) in proportione, in qua eſt ſumma qq. AZ.BX, quadruplique q. GF ad q. AZ cum duplo q. GF. His poſitis

(2) ex ſecund. parte prop. 27.

Notum eſt ex mechanicis, quod VR ad RO eandem habebit rationem, quam habet ad ſolidum rotundum areæ DEXZ ipſius differentia a rotundo ſolido areæ ABXZ, nempe prædictus annulus areæ AGBEID; ac propterea VO ad OR ſe habebit ut ſolidum rotundum areæ ABXZ ad ſolidum rotundum areæ DIEXZ, & ſubſequenter, ut ſumma qq. AZ.BX, quadruplique q. GF ad ſummam qq. DZ.EX atque quadrupli q. IF; ſcilicet ut antecedens poſterioris ad antecedentem prioris ex duabus ſupradictis rationibus.

Unde eſt quod ZX ad XO (3) erit ut differentia antecedentium ad differentiam conſequentium terminorum earundem rationum, videlicet ut differentia q. AZ.DZ cum differentia qq. BX.EX, & cum quadruplo differentiæ qq GF.IF; ad differentiam conſequentium terminorum, id eſt ad differentiam qq. AZ.DZ cum duplo differentiæ qq. GF.IF. Quare, &c.

(3) ex lem. 4.

SCHOLIUM I.

Si in duabus ex appoſitis figuris diametri XZ. x z normales, vel ſimiliter inclinatæ fuerint ad ordinatas, reperietur, quod annulus, genitus (in altera) circa diametrum XZ a differentia AGBEID arearum AGBXZ.DIEXZ ſe habebit ad ſolidum progenitum [in reliqua earumdem duarum figurarum]

 circa

circa axem *x z* ab area *a b x z* in proportione compoſita ex ratione diametri XZ ad diametrum *x z*, & ex ratione, in qua eſt differentia qq. AZ . DZ cum differentia qq. BX . EX, & cum quadruplo differentiæ qq. GF . IF ad ſummam qq. *a z . b x*, quadruplique q. *g f*; & ſe habebit ad annulum factum (in poſteriori figura) circa diametrum *x z* per differentiam *a g b e i d* arearum *a g b x z . d i e x z* in proportione compoſita ex ratione diametri XZ ad diametrum *x z*, & ex ratione, in qua eſt differentia qq. AZ . DZ cum differentia qq. BX . EX, & cum quadruplo differentiæ qq. GF . IF ad differentiam qq. *a z . d z* cum differentia qq. *b x . e x*, & cum differentia qq. *g f . i f*.

SCHOLIUM II.

Si in duabus ex appoſitis figuris diametri XZ . *x z* fuerint axes: reperietur, quod diſtantia (in altera) ordinatæ BX a centro gravitatis prædicti annuli geniti a differentia arearum AGBXZ . DIEXZ ſe habebit ad diſtantiam (in reliqua earundem duarum figurarum) ordinatæ *b x* a centro grevitatis rotundi ſolidi geniti ab area *a g b x z* in prop=ne compoſita ex ratione axis XZ ad axem *x z*, ex ratione differentiæ qq. AZ . DZ cum duplo differentiæ qq. GF . IF ad q. *a z* cum duplo q. *g f*, & ex ratione, quam reciproce habet ſumma qq. *a z . b x* quadruplique q. *g f* ad differentiam qq. AZ . DZ, cum differentia qq. BX . EX, & cum quadruplo differentiæ qq. GF . IF. Et ſe habebit ad diſtantiam (in poſteriori fig.) ordinatæ *b x* a centro gravitatis annuli progeniti per differentiam *a g b e i d* arearum *a g b x z . d i e x z* in proportione compoſita ex ratione axis XZ ad axem *x z*, ex ratione differentiæ qq. AZ . DZ cum duplo differentiæ qq. GF . IF ad differentiam qq. *a z . d z* cum duplo differentiæ qq. *g f . i f*, & ex ratione quam reciproce habet differentia qq. *a z . d z* cum differentia qq. *b x . e x*, & cum quadruplo differentiæ qq. *g f . i f* ad differentiam qq. AZ . DZ cum differentia qq. BX . EX, & cum quadruplo differentiæ qq. GF . IF.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA XXV. Propoſitio 29.

SI duæ ordinatæ AD. BC ad communem axem CD duarum ſemiſectionum conicarum, aut cylindricarum abſcindant duo ſegmenta AGBCD. NOPCD, quorum alterum NOPCD comprehendatur a reliquo AGBCD: & duæ ordinatæ EK. HI ad communem axem IK duarum ſemiſectionum conicarum, aut cylindricarum abſcindant alia duo ſegmenta ELHIK. QRSIK, quorum alterum QRSIK comprehendatur quidem a reliquo ELHIK, & ipſi axes CD. IK dimidientur ab aliis ordinatis GOF. LRM. fig. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. & 120.

I. Proportio, in qua momentum rotundi ſolidi circa axem CD geniti ab altera AGBCD priorum arearum AGBCD. NOPCD, ac centraliter appenſi in ipſa diametro CD fulcta in altero C ex duobus terminis [1] ſe habet ad momentum rotundi ſolidi circa axem IK deſcripti ab altera ELHIK poſteriorum arearum ELHIK. QRSIK, centraliter appenſi in ipſa diametro IK fulcta in altera I extremitatum, componetur ex ratione duplicata rationis, quam habet axis CD ad axem IK, & ex ratione q. AD cum duplo q. GF ad q. EK cum duplo q. LM.

[1] Videatur Torricell. de dim. parab. definit. v.

II. Proportio, in qua momentum rotundi ſolidi circa axem CD geniti ab altera AGBCD ex prioribus areis, centraliter appenſi in diametro CD fulcta in altero C extremorum ſe habet ad momentum annuli, circa axem IK procreati a differentia ELHSRQ poſteriorum arearum, centraliter appenſi in diametro IK fulcta in altera I extremitatum, componetur ex ratione duplicata ejus, quam habet axis CD ad axem IK, & ex ratione quadrati AD cum duplo q. GF ad differentiam quadratorum EK. QK cum duplo differentiæ qq. LM. RM.

III. Proportio, in qua momentum annuli geniti circa axem CD a differentia AGBPON priorum arearum, centraliter appenſi in diametro CD fulcta in altero C terminorum, eſt ad momentum annuli deſcripti circa axem IK per differentiam ELHSRQ poſteriorum arearum, centraliter appenſi in diametro IK fulcta in altera I extremitatum, componetur ex ratione duplicata axis CD ad axem IK, & ex ratione differentiæ qq. AD, ND cum duplo differentiæ qq. GF. OF ad differentiam qq. EK. QK cum duplo differentiæ qq. LM. RM.

Digitized by Google

Ponatur relatio X.V conſimilis rationi axis CD ad axim IK, ac relatio R.T conſimilis rationi, quam habet ſumma qq. AD. BC quadrupliquę q. GF ad ſummam ex qq. EK.HI cum quadruplo q. LM; quatenus rationes X.V; R.T; component (1) proportionem rotundi ſolidi areæ AGBCD ad rotundum ſolidum areæ ELHIK, vel potius illud ad hoc ſolidum ſe habeat ut productum X,R ad productum V,T.

[1] *ex pr. part. ſchol. prop. 27.*

Deinde ponatur *y* ad *z* eſſe ut q. AD cum duplo q. GF ad q. EK cum duplo q. LM, quatenus proportio, quam habet diſtantia ordinatæ BC a centro gravitatis prioris ſolidi, ad diſtantiam ordinatæ HI a centro gravitatis poſteriori ſolidi (2) componatur ex rationibus X.V, T.R, *y*.*z*, & æquetur rationi producti X,T,*y* ad productum V,R,Z. His poſitis.

[2] *ex ſecund. par. ſchol. prop. 27.*

Proportio, in qua momentum rotundi ſolidi geniti ab area AGBCD ad momentum ſolidi rotundi progeniti ab area ELHIK compoſita (3) eſt ex ratione illius ad hoc ſolidum (ſeu ratione producti X,R ad productum V.T), & ex ratione, quam habet ordinatæ BC diſtantia a centro gravitatis prioris ſolidi, ad ordinatæ HI diſtantiam a centro gravitatis poſterioris ſolidi (vel ratione producti X,T,*y* ad productum V,R,Z) ac propterea æquatur rationi, in qua eſt productum X,R,X,T,*y* ad productum V,T,V,R,Z, vel in qua eſt productum X,X,*y* ad productum V,V,Z; vel potius componitur ex ratione duplicata rationis X.V, vel [ob conſtrutionem] rationis axis CD ad axem IK, & ex ratione *y*.*z*, vel [ob conſtrutionem] ratione q. AD cum duplo q. GF ad q. EK cum duplo q. LM. Ut primo loco proponebatur.

(3) *ex mechanicis.*

Præterea momentum rotundi ſolidi geniti ab area ELHIK, centraliter appenſi ex diſtantia IK, fulcta in termino I ad momentum annuli geniti a differentia ELHSRQ arearum ELHIK. QRSIK centraliter quidem appenſi ex eadem diſtantia IK fulcta in termino I, proportionem habet (4) compoſitam ex proportione, in qua eſt ordinatæ HI diſtantia a centro gravitatis illius ſolidi rotundi, ad diſtantiam ipſius ordinatæ HI a centro gravitatis prædicti annuli (& quæ conſtat ex ratione q. EK cum duplo q. LM ad differentiam qq. EK.QK cum duplo differentiæ qq. LM.RM, & ex ratione, quam reciproce habet differentia KE.KQ cum differentia qq. HI.SI, &

(4) *ex pr. par. ſchol. 2. prop. 28.*

cum

cum quadruplo differentiæ qq. LM . RM ad ſummam qq. EK . HI, quadruplique q. LM) & ex proportione ejuſdem ſolidi rotundi areæ ELHIK ad præfatum annulum areæ ELHSKQ, ſeu [1] proportione ſummæ qq. EK . HI quadruplique q. LM ad differentiam qq. EK . QK cum differentia qq. HI . SI, & cum quadruplo differentiæ qq LM . RM: unde conſtat momentum prædicti ſolidi rotundi geniti ab area EHIK ad momentum prædicti annuli eſſe, ut q. EK cum duplo q. LM ad differentiam qq. EK . QK cum duplo differentiæ qq. LM . RM. Atqui momentum ſolidi rotundi procreati ab area ABCD eſt ad illud ſolidum rotundum areæ EHIK in prop=ne compoſita (ut ſuperius oſtenſum eſt) ex ratione duplicata axis CD ad axem IK, & ex ratione q. AD cum duplo q. GF ad q. EK cum duplo q. LM; patet igitur idem momentum rotundi ſolidi geniti ab area ABCD ad momentum annuli progeniti ab area ELHSKQ eſſe in proportione compoſita ex ratione duplicata ejus quam habet axis CD ad axem IK, & ex ratione q: AD cum duplo q: GF ad differentiam qq: EK . QK cum duplo differentiæ qq: LM . RM: ut ſecundo loco proponitur.

[1] ex primo parte ſchol. 1. prop. 28.

Denique proportio, quam habet momentum annuli geniti ab area AGBPN centraliter appenſi in diametro CD fulcta in termino C, ad momentum ſolidi rotundi procreati ab area ABCD, & ſimiliter appenſi, conſimilis eſt ex nuper oſtenſis, rationi, quam habet differentia qq: AD . ND cum duplo differentiæ qq: GF . OF ad q: AD cum duplo q: GF: & hoc momentum ſolidi geniti ab area ABCD ad momentum annuli deſcripti ab area ELHSRQ, ac centraliter appenſi ex diſtantia IK fulcta in termino I, eſt in proportione compoſita ex ratione duplicata ejus in qua eſt axis CD ad axim IK, & ex ratione q: AD cum duplo q: GF ad differentiam qq: EK . QK cum duplo differentiæ qq: LM . RM. Prædictum igitur momentum annuli procreati ab area AGBPON ad prædictum momentum annuli progeniti ab area ELHSRQ ſe habebit in prop=ne compoſita ex ratione duplicata rationis axis CD ad axim IK, & ex ratione differentiæ qq: AD . ND cum duplo differentiæ qq: GF . OF ad differentiam qq: EK . QK cum duplo differentiæ qq. LM . RM, ut tertio loco proponebatur, &c.

THEO-

THEOREMA XXVI. Propoſitio 30.

fig. 121. 122. 123. & 124. *Datis duabus ordinatis* AD . BE *ad diametrum ſemiſectionis conicæ aut cylindricæ, quæ abſcindant ab ipſa ſemiſectione ſegmentum* AGBED; *atque data alia ordinata* GF *dimidiante partem* DE *ipſius diametri interceptam inter illas ordinatas* AD . BE; *& per rectam lineam* Aa *eidem diametro parallelam a termino* A *alterius* AD *priorum ordinatarum clauſum ſit parall=mum* AaED.

Proportio quam habet ipſum ſegmentum AGBED *ad parall=mum* ADEa *conſimilis erit rationi, in qua eſt ſumma ex qq: priorum ordinatarum* AD . BE, *& ex quadruplo q: poſterioris ordinatæ* GF *ad ſextuplum rect=li ſub baſim* AD *prædicti parall=mi in duplam diſtantiam diametri* DE *a centro gravitatis ejuſdem ſegmenti* AGBED; *dummodo ipſa diſtantia ordinatis æquidiſtet.*

Per terminum G ordinatæ GF agatur recta SGP diametro DE parallela complenſque parall=mum SPED, ad quod ſe habebit (1) area AGBED in proportione compoſita ex ratione ſolidi deſcripti circa diametrum DE ab ipſamet area AGBED ad ſolidum ſimiliter factum a parall=mo SPED (nempe (2) ratione ſummæ qq: AD . BE, quadruplique q: GF ad hujus q: ſextuplum) & ex ratione, quam habet GF, ſeu SD ad duplam diſtantiam diametri DE a centro gravitatis areæ AGBED, vel quam habet ſextuplum q: GF ad ſextuplum rect=li ſub GF in ipſius diſtantiæ duplum; ſcilicet ſe habebit ut ſumma qq: AD, BE quadruplique q: GF ad ſextuplum hujus rect=li ex GF in ipſius diſtantiæ duplum.

(1) ex n. 2. ſupp. 2.

(2) ex prop. 27.

Atqui parall=mum SPED eſt ad parall=mum AaED ut GF ad AD, ſive ut ſextuplum rect=li ex GF in prædictæ diſtantiæ duplum ad ſextuplum rect=li ex hoc ipſo duplo in AD: conſtat ex æquo, quod proponitur, &c.

THEO-

THEOREMA XXVII. Propoſitio 31.

SI ab extremitate B *alterius* BE *ex duabus inæqualibus ordinatis* BE . CD *ad diametrum conicæ ſemiſectionis ducta ſit recta* BC *ad terminum reliquæ ordinatæ* CD, *& ulterius producta conveniat in* H *cum alia ordinata* AF, *ſitque dupla adaucti ſegmenti* CH: *& inſuper a prædicta extremitate* B *ducta ſit recta* BL *parallela ad ipſam diametrum* EF *ac deſinens in poſteriorem ordinatam* AF, *& quæ tota cadat vel extra, vel non extra ſectionem.* *fig.* 125. 126. 127. 128. 129. & 130.

Dico, quod area ACBL, *clauſa a rectis* AL . BL, *& a curva* ACB *ſe habebit ad triangulum* HBL *ut* HF + 2BE *ad triplam diſtantiam (ordinatis parallelam) diametri* EF *a centro gravitatis ejuſdem areæ* ACBL.

Jam notum eſſe ſuppono, (1) quod triplum diſtantiæ diametri EF a centro gravitatis tri=li HBL æquat HF + 2BE. (1) *ex Archim.*

Deinde dimidiando per ordinatam ONM rectas EF . BH in O . N, illico innoteſcet quod HC dupla eſſe debet partis CN; quandoquidem BC datur dupla ipſius CH, & per conſtrutionem BH dupla eſt partis HN; unde rect=lum BHC æquabitur duplo rect=li BH . CN, vel quadruplo rect=li BNC; ſed ut rect=lum BHC ad quadruplum rect=li BNC; (2) ita eſt differentia quadratorum HF . AF ad quadruplum differentiæ quadratorum MO . NO; huic igitur quadruplo adæquabitur differentia quadratorum HF . AF: & additis hinc inde quadratis AF . BE, ac quadruplo quadrati NO, orietur aggregatum quadratorum AF . BE, quadruplique quadrati MO æquale aggregato ex quadratis HF . BE, & ex quadruplo quadrati ON: ac propterea inter ſe (3) æquabuntur ſolida procreata circa rectam EF ab areis ACBEF . HBEF, & per conſequens inter ſe æqualia erunt & ſolida ſimiliter genita ab area ACBL, & a tri=lo HBL denumque area ACBL eandem proportionem (4) habebit ad triangulum HBL quam triplum intervallum ipſius EF a centro gravitatis trianguli HBL, ſeu quam HF + 2BE ad triplam diſtantiam ejuſdem diametri EF a centro gravitatis areæ ACBL. Quod &c.

(2) *ex conic. Elem.*
(3) *ex ſchol. prop.* 27.
(4) *ex ſupp.* 2. *n.* 4.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA XXVIII. Propoſitio 32.

fig: 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. & 139. *SI recta linea* AL *incidens in duas ordinatas* DZP . BXQ *ad diametrum* XZ *conicæ aut cylindricæ ſectionis* DCBQKP *ipſam diametrum, ſectioniſque perimetrum non ſecet inter illas ordinatas, claudatque cum ipſo perimetro ſpatium* DCBLA, *in quo recta* DB *jungat earundem ordinatarum terminos* D . B, *& tam ipſa* DB *quam illa incidens* AL *dimidietur a tertia ordinata* CMK.

Spatium DCBLA *ad rectilineum* ALBD *erit ut aggregatum rect=lorum* DAP BLQ, *cum quadruplo rect=li* CIK *ad ſextuplum rect=li ſub* AD + LB *in intervallum diametri* XZ *a centro gravitatis ejuſdem ſpatii* DCBLA *dummodo hoc intervallum (puta* TZ*) ordinatis parallelum intelligatur.*

Detur primo ſpatium DCBLA jacere ad alteram partem diametri XZ, & ſemiordinata ZP abſciſſo ſegmento ZF potente ſextam partem duorum ſimul rect=lorum DAP.BLQ, quadruplique rect=li CIK, atque completo parall=mo FZXH, dimidietur ipſum ſegmentum ZF in N; quatenus ZN ſit ipſius XZ intervallum a centro gravitatis ejuſdem parall=mi, &c.

Deinde deſcriptis, circa diametrum XZ, ſolidis tam a parall=mo FZXH, quam a ſpatiis DCBXZ . ALXZ . DCBLA; cum ſolidum ſpatii DCBXZ ad ſolidum parall=mi FZXH ſit

(1) ex prop. 28. [1] ut ſumma qq: DZ BX quadruplique q: CM ad ſextuplum q: ZF; & pariter ad hoc ſolidum parall=mi FZXH ſe habeat ſolidum ſpatii ALXZ ut ſumma tam qq: AZ . LX, quam quadru-

(2) ex n. ſupp. 2. pli q: IM ad idem ſextuplum q: ZF; neceſſe (2) eſt ut ſolidum ſpatii DCBLA ſit ad prædictum ſolidum parall=mi FZXH ſicuti eſt aggregatum rect=lorum DAP . BLQ cum quadruplo rect=li CIK ad ſextuplum q: ZF, ſcilicet (per conſtrutionem) in proportione æqualitatis.

Quapropter ſpatium DCBLA ad parall=mum FZXH ſe ha-

(3) Eucl. Elem. v. 24. bebit (3) reciproce ut diſtantia ZN ad diſtantiam TZ: ſed hoc parall=mum FZXH eſt ad rectilineum DBLA ut 2ZF ad AD + LB. Proportio ergo ſpatii DCBLA ad rectilineum DBLA componetur ex ratione NZ . TZ, & ex ratione 2FZ ad AD + BL,

& æqua-

Digitized by Google

& æquabitur rationi, in qua eſt rect=lum FZN bis ſumptum, vel unicum quadratum EZ, ſeu (per conſtructionem) ſexta pars ſummæ rectangulorum DAP. BLQ quadruplique rectanguli KIC ad rectangulum ſub TZ in AD + LB, vel potius in qua eſt ipſa ſumma ad ſextuplum rect=li TZ in AD + LB.

Ponatur nunc ſpatium DCBLA non eſſe totum ad alteram partem diametri XZ, in qua diametro reperietur centrum gravitatis ſpatii DCBQKP, compoſiti ſcilicet ex duobus DCBLA, PKQLA. Unde concipiendo VZ eſſe diſtantiam ipſius diametri XZ a centro gravitatis ſpatii PKQLA, ordinatis parallelam ſpatium DCBLA ad ſpatium PKQLA (i) erit reciproce ut diſtantia VZ ad diſtantiam TZ, vel ut ſextuplum rect=li ſub ZV in AP + LQ ad ſextuplum rect=li ſub TZ in AP + LQ. *fig. 138. & 139.* *(i) ex Mechanicis.*

Et cum ſpatium PKQLA ad rectilineum PQLA ſit (per præcedentem caſum) ut ſumma rect=lorum DAP. BLQ quadruplique rect=li CIK ad ſextuplum rect=li ſub VZ in AP + LQ; quippe qui hoc ſpatium PKQLA jacet ad alteram partem diametri XZ.

Atque rectilineum ALQP ſit ad rectilineum DBLA ut AP + LQ ad AD + LB, vel ut rect=lum TZ, AP + LQ ad rect=lum TZ, AD + LB, vel ut ſextuplum ad ſextuplum.

Erit ex æquo perturbate ſpatium DCBLA ad rectilineum DBLA ut prædicta ſumma rect=lorum DAP. BLQ, quadruplique rect=li CIK ad ſextuplum rect=li TZ . AD + LB, &c.

THEOREMA XXVIIII. Propoſitio 33.

SI duæ ordinatæ AZ . BX *ad communem diametrum duarum ſemiſectionum conicarum, aut cylindricarum abſcindant duo ſegmenta* AGBXZ . DIEXZ *ab ipſis ſemiſectionibus, quorum alterum* DIEXZ *comprehendatur a reliquo* AGBXZ, *& alia ordinata* GIF *dimidiet diametri partem* XZ *inter illas ordinatas interceptam: & amplius inter eaſdem priores ordinatas* AZ . BX *conſtitutum ſit aliquod tri=lum* AXZ. *fig. 140. 141. 142. & 143.*

Differentia AGBEID *eorundem ſegmentorum* AGBXZ . DIEXZ *ſe habebit ad tri=lum* AXZ *ut differentia qq.* AZ . DZ *cum differentia qq:* BX . EX, *& cum quadruplo differentiæ qq:* GF . IF

ad ſextuplum rect=li ſub baſim AZ *predicti tri=li* AXZ *in diſtantiam (puta* ZT*) diametri* XZ *a centro gravitatis, præfatæ differentiæ* AGBEID *ſegmentorum* AGBKZ . DIBXZ *dummodo ipſa diſtantia ordinatis æquidiſtet*.

Ab ordinata AZ, protracta, dum opus fuerit, abſcindatur pars ZH potens ſextam partem aggregati ex differentia qq: AZ . DZ ex differentia qq: BX . EX, & ex quadruplo differentiæ qq: GF . IF, & per rectam HK, diametro XZ parallelam compleatur parall=mum ZXKH, &c.

[1] ex prop. 28. Et quia annulus, circa XZ, deſcriptus ab area AGBEID eſt (1) ad ſolidum ſimiliter factum a parall=mo ZXKH, ut differentia qq: AZ . DZ cum differentia qq: BX . EX, & cum quadruplo differentiæ qq: GF . IF ad ſextuplum q: ZH, ſcilicet

(2) Ex conſtructione. in prop=ne (2) æqualitatis; eadem area AGBEID ad parall=mum HK XZ (3) erit reciproce ut diſtantia ipſius XZ a centro gravitatis

[3] ex n. 4 ſupp. 2. parall=mi ZK; nempe ut ſemiſſis ZN ipſius ZH ad ZT.

Sed parall=mum ZK eſt ad tri=lum AXZ ut 2 ZH ad (4) ZA;

(4) Ex lib. 1. p. 41 & lib. 6. p. 1. Eucl. proportio igitur areæ AGBEID ad tri=lum AXZ componetur ex ratione NZ . TZ, & ex ratione 2 HZ . AZ, æquabiturque rationi, quam habet duplum rect=li HZN, ſeu quadratum ZH ad rect=lum AZT, vel potius, quam habet ſextuplum ad ſextuplum, ſcilicet quam habet differentia qq: AZ . DZ cum differentia qq: BX . EX & cum quadruplo differentiæ qq: GF . IF ad ſextuplum rect=li AZT. Quod, &c.

THEOREMA XXX. *Propoſitio* 34.

fig. 144. & 145. Datis duobus bilineis ABC . DBE, *in eadem coni ſectione centro* N *decorata, abſciſſis per duas ordinatas* AC . DE *ad aliquam diametrum* FBN: *alterum bilineum* ABC *ad reliquum* DBE *ſe habet in prop=ne compoſita ex ratione, in qua eſt cubus baſis* AC *ad cubum baſis* DE, *& ex ratione quam habet diſtantia* NI, *qua ſectionis centrum* N *recedit a centro gravitatis (puta* I*) poſterioris bilinei* DBE *ad intervallum* NH *illius centri* N *a centro gravitatis prioris bilinei* ABC.

Compleantur tri=la ABC . DBE, fiatque MN æqualis BN; quatenus BM ſit latus tranſverſum.

Et

Et quia bilineum ABC eſt (1) ad tri=lum ABC ut FM ad $\frac{1}{2}$ HN (1) *ex prop.* 12.
& hoc tri=lum ABC eſt ad tri=lum DBE ut rect=lum AFB ad rect=lum DGB, & hoc tri=lum DBE eſt ad bilineum DBE ut $\frac{1}{2}$ IN ad GM: proportio bilinei ABC ad bilineum DBE compoſita erit ex rationibus FM. $\frac{1}{2}$ HN; $\frac{1}{2}$ IN. GM, & ex ratione rect=li AFB ad rect=lum DGB, vel potius compoſita erit ex ratione AF. DG; ex ratione rect=li MFB ad rect=lum MGB, (ſeu ratione q: AF ad q: DG) & ex ratione $\frac{1}{2}$ IN. $\frac{1}{2}$ HN, ſeu ratione IN. HN; & per conſequens compoſita erit ex ratione cubi AF ad cubum DG, ſeu cubi AC ad cubum DE, & ex ratione IN. HN. Quod, &c.

THEOREMA XXXI. Propoſitio 35.

In quacumque ſectione conica ſi a vertice C *diametri* CZ *procedant rami* CA. CG *ad terminos duarum ſemiordinatarum* AF. GL *abſcindentes duo bilinea* ABC. GHC. *Alterum bilineum* ABC *erit ad reliquum* GHC *in prop=ne compoſita ex ratione q:* FC *ad q:* LC, *& ex ratione, quam habet diametri* CZ *diſtantia* RT *a centro gravitatis poſterioris bilinei* GHC *ad ejuſdem diametri diſtantiam* OV *a centro gravitatis prioris bilinei* ABC. *fig.* 148.

Eſto CN diametri CZ parameter: & cum bilineum ABC ſit (2) ad tri=lum ACF ut rect=lum FCN ad ſextuplum rect=li AF. VO. tri=lum vero ACF ad tri=lum GCL ut rect=lum AFC ad rect=lum GLC triangulumque GCL ad bilineum GHC ut ſextuplum rect=li GL. TR ad rect=lum LCN; proportio bilinei ABC ad bilineum GHC componetur ex rationibus rect=li FCN ad rect=lum AF. VO rect=li AFC ad rect=lum GLC, ac rect=li GL. TR ad rect=lum LCN; ſcilicet componetur ex ratione q: FC ad q: LC, & ex ratione TR. VO. Quod, &c. (2) *ex prop.* 20.

THEOREMA XXXII. Propoſitio 36.

fig. 147. 148 & 149. *SI baſes* AC . DF *duorum bilineorum* ARC . DSF *ejuſdem conicæ ſectionis dimidientur a duabus ordinatis* BGIK . ML HE *ad aliquam ipſius ſectionis diametrum* XZ : *quoties inter ſe adæquantur rect=la* BGK . MHE *ſub harum ordinatarum ſegmentis, toties inter ſe æquabuntur prædicta bilinea, & e converſo.*

Prius quam ad demonſtrationem deveniamus, ſupponere juvat, quod ejuſdem parabolæ bilinea, diametros æquales habentia, inter ſe ſunt æqualia; & ejuſdem conicæ ſectionis centro decoratæ bilinea, quorum diametri tranſverſis lateribus, vel eorundem dimidiis ſint proportionales inter ſe ſunt æqualia, & proportionaliter analoga, & è contra. Oſtenduntur enim hæ concluſiones ab aliis, & præcipue *a præclariſſimo Vincentio Viviani præceptore meo, & ab Archimede in Libro de Conoidibus & Sphæroidibus.*

fig. 147. Si data ſectio ſit parabola, eſto XT parameter diametri XZ bilineorumque ARC . DSF diametri ſint GR . HS, quæ diametro XZ æquidiſtabunt. Et quia, ob parabolæ naturam, rect=lum BGK rect=lo GR, XT, rect=lumque MHE rect=lo HS, XT eſt æquale, certum eſt, quod ubi inter ſe æqualia ponantur rect=la BGK . MHE; & ſubſequenter etiam rect=la GR, XT . HS, XT, æquari debebunt inter ſe diametri GR . HS proindeque bilinea ARC . DSF. Dum vero dentur æqualia bilinea ARC . DSF, & per conſequens ipſorum diametri GR . HS inter ſe ſint æquales; æqualia utique erunt tam rect=la GR, XT . HS, XT, quam rect=la BGK . MHE.

fig. 148. & 149. In ſectione, centro O decorata, inventis bilineorum ARC . FSD diametris RGO . SHO, quæ per centrum O, productæ dum opus fuerit, tranſire debent, ex conicis elementis ponatur OT eſſe ſemilatus coniugatum ſemitransverſo lateri XO, & ON . OP eſſe ſemitransverſa coniugata ſemitranſverſis lateribus RO . SO diametrorum GR . HS.

Et ubi rect=la BGK . MHE inter ſe ponantur æqualia; proportio rect=li BGK ad rect=lum DHF ſimilis erit rationi rect=li

HE ad rect=lum DHF, ſeu (1) rationi quadrati OT ad q. OP, quam componunt relatio q: OT ad q: ON, ac relatio q: ON ad q: OP; atqui proportio rect=li BGK ad rect=lum DHF componitur ex ratione rect=li BGK ad rect=lum AGC; vel quadrati OT ad q: ON, & ex ratione rect=li AGC ad rect=lum DHF; proportio igitur compoſita ex rationibus q: OT ad q. ON, & q. ON ad q. OP conſimilis erit rationi compoſitæ ex ratione q. OT ad q. ON, & ex ratione rect=li AGC ad rect=lum DHF, ſeu ratione q. AG ad q. DH: ac propterea q. AG ad q: DH erit ut q: ON ad q: OP; & permutando efficietur relatio q. AG ad q. ON (vel relatio (2) differentiæ qq. RO. GO ad q. RO) ſimilis rationi q: DH ad q. OP, ſeu rationi, in qua eſt quadratorum OS. OH differentia ad q: OS: unde infertur diametros GR. HS bilineorum ABC. FSD ſemitransverſis RO. SO eſſe proportionales, proindeque ipſa bilinea inter ſe adæquari.

(1) deducitur ex prop. 17. III. Elem. Apoll.

[2] Apol. l. 1. prop. 21. & def. 4. poſt prop. 16.

Data deinde horum bilineorum æqualitate facile infertur æqualitas rect=lorum BGK. MHE.

THEOREMA XXXIII. Propoſitio 37.

SI unumquodque duorum æqualium bilineorum ARE. QSM, *ab eadem coni ſectione abſciſſorum, jaceat ad alteram partem alicujus diametri* IC: *hujus diametri pars* DC *intercepta inter ſemiordinatas* AC. ED *procedentes ab extremitatibus baſis* AE *alterius bilinei* ARE, *ſe habebit ad ipſarum ſemiordinatarum aggregatum ut intercepta pars* LK *inter ſemiordinatas* ML. QK *ductas a terminis baſis* QM *reliqui bilinei* QSM, *ad has ſemiordinatas ſimul ſumptas.*

fig. 150. 151. & 152.

Jam bilineorum ARE. QSM diametri [puta GR. SP] diametro CI, in parabola æquidiſtant, at in ſectione centro decorata per centrum [puta I] tranſire (3) debent, ſaltem protractæ, & amplius in hoc caſu ſemitransverſis lateribus RI. SI proportionari, per ea, quæ ante præcedentis propoſitionis demoſtrationem ſuppoſita ſunt; immo in utroque caſu ipſa bilinea erunt analoga; proindeque eorundem diametri proportionaliter [4] ſecabuntur a gravitatis centris [puta T. V] nempe pro-

(3) ex conic. elem. lib. 1. prop. 46. 47.

(4) ex M. cb.

portionabuntur partibus TR . VS, & amplius [in ſectione, centro I decorata] partibus TI . VI.

Deinde ordinando ad diametrum CI rectas TX . VZ ab ipſis centris, atque rectas HGF . OPN a punctis mediis GP baſium AE . QM prædictorum æqualium bilineorum ARE . QSM; conſtat ex præcedenti propoſitione, differentiam quadratorum GF . HF differentiæ quadratorum PN . ON parem eſſe.

Et cum in parabola, tam relatio GF . TX, quam relatio PN . VZ ſit proportio æqualitatis: in reliquis autem ſectionibus relatio GF . TX ſimilis eſt rationi GI . IT, vel PI . IV, ſeu rationi PN . VZ; erit in utroque caſu GF ad TX ut PN ad VZ.

Ulterius rectilineum AEDC ad bilineum ARE ſe habet (1) ut $\frac{1}{2}$ TX in AC + DE, vel in 2GF ad differentiam qq: GF . HF, bilineum vero ARE ad ſibi æquale bilineum QSM eſt ut ipſa differentia quadratorum GF . HF ad huic æqualem differentiam quadratorum PN . ON; & hoc bilineum QSM eſt ad rectilineum LMQK ut poſterior differentia qq: PN . ON ad $\frac{1}{2}$ VZ in KQ + LM, ſeu in 2PN: ex æquo igitur rectilineum AEDC erit ad rectilineum QMLK ut $\frac{1}{2}$ TX in 2GF ad $\frac{1}{2}$ VZ in 2PN, ſcilicet ut rect=lum TX, GF ad rect=lum VZ, PN, vel potius ut q: GF ad q: PN; quippe qui ſimiles invenimus rationes TX . GF; VZ . PM

(1) ex prop. 19.

Sed rect=lum ex DC in AC + DE, ſeu in 2GF eſt ad rect=lum ſub LK in 2PN, ut rectilineum AEDC ad rectilineum QMLK, & per conſequens ut q: GF ad q: PN; permutando efficietur proportio rect=li DC, GF ad q: GF, ſeu proportio DC . GF conſimilis rationi rect=li LK, PN ad q: PN, nempe rationi LK . PN; ac denique erit DC ad AC + DE ut LK ad ML + KQ. Quod, &c.

COROLLARIUM.

Conſtat ex demonſtratione, rectilineum AEDC eſſe ad rectilineum MQKL in proportione duplicata tam rationis DC . KL quam rationis GF . PN.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA XXXIV. Propoſitio 38.

SI recta linea BO *parabolæ axem* IZ, *ultra verticem* I *productum, normaliter ſecet ita, ut abſciſſa pars* OI *ad verticem* I *ſubquadrupla ſit parametri* IE, *claudatque cum duobus quibuslibet diametris* AB. CD *parabolicum quadrilineum* ACDB. fig. 153.

Summa ex radicibus quadratis omnium ordinatarum, in ipſo quadrilineo, diametris parallelarum, æquabitur producto a radice quadrata prædictæ abſciſſa OI *in parabolicum arcum* AC.

Cuivis ordinatæ GH in quadrilineo ACDB concipiatur alia infinite proxima LT; quatenus ſpatiolum GLTH infinite parvum, tamquam rectilineum conſiderari poſſit; ac propterea productum a radice q: ipſius GH in HT æquetur complexui ex radicibus qq: cunctarum ordinatarum in ipſo ſpatiolo GLTH.

Deinde ducatur recta GM, parabolicam curvam contingens in termino G ipſius GH, compleaturque rect=lum GHOP: & quia, ob parabolam, quadratum ſemiordinatæ GP æquatur rect=lo ſub abſciſſa IP in parametrum IE, vel rect=lo ſubtangentis PM (duplæ ipſius PI) in ſemiparametrum, vel potius in duplum abſciſſæ OI; quadratum MP eandem habebit rationem ad q: GP, quam ad duplum rect=li MP, OI, nempe quam PM ad 2 OI, vel quam PI ad OI: & componendo orietur relatio q: GM ad q: GP ſimilis rationi PO. IO, vel GH. IO; & ideo radix q: ordinatæ GH ad radicem q: ipſius OI ſe habebit ut MG ad GP, vel ut tangentis GM pars LG infinite parva ad HT, vel potius ut parabolicus arcus GL infinite parvus ad HT: quare productum ab HT in radicem quadratam ordinatæ GH (nempe ſumma ex radicibus qq omnium ordinatarum in ſpatiolo GLTH) æquabitur producto a radice quadrata ipſius OI in arcum GL: & cum hoc ubique verificetur, manifeſtum eſt, quod proponebatur.

CO-

COROLLARIUM I.

Unde eſt, quod congeries ex radicibus quadratis omnium ordinatarum in quadrilineo ACDB ſe habebit ad cumulum ex radicibus quadratis cunctarum ordinatarum in alio quadrilineo I*c*d*o* ut arcus parabolicus AC ad arcum I*c*; quandoquidem illa congeries æquatur producto ab arcu AC in radicem ipſius IO; productumque ab hac radice in arcum I*c* æquatur prædicto cumulo.

COROLLARIUM II.

Et in quadrilineo ACDB ordinando quamcumque rectam GH, ſe habebit ubique AB ad GH ut q: BO cum q: ſemiparametri ad hoc q: cum q: HO.

Etenim, in parabola, (1) eſt IP ad IE ut q: GP ad q: IE; ideoque IP ad IO, ſubquadruplam parametri IE, erit ut q: GP ad q: ſemiparametri; & componendo, erit PO ad IO, vel GH ad IO, ut q: GP cum q: ſemiparametri ad hoc q:, & pari modo reperitur IO, ad AB eſſe ut q: ſemiparametri ad hoc q: cum q: BO: unde ex æquo, & convertendo conſtat propoſitum.

(1) *Apoll. libr.* I. *prop.* II.

THEOREMA XXXV. Propoſitio 39.

fig. 154 155.156 & 157.

SI *circa axem* XZ *datæ hyperbolæ* MUNS *deſcripta ſit parabolica curva* & IO, *verticem habens in centro* I *hyperbolæ, parametrumque habens æqualem coniugato* LL.

Quadrilineum hyperbolicum MUSQK *abſciſſum a duabus ordinatis* KM. SQ *ad ſecundum axem* YY *æquabitur rect=lo ſub ſemitransverſum* IN *primi axis* ZX *in parabolicum arcum* OV *comprehenſum inter ipſas ordinatas, & huic arcui erit analogum in gravitate*.

Hanc propoſitionem egregie jam demonſtratam video a *Rev. P. Abbate Grandi*, inſigni noſtri temporis Mathematico, & in Piſano Licæo Matheſeos profeſſore digniſſimo, cui (ut cetera taceam) ſecretiora, & magis abſtruſa Geometriæ myſteria non

ſunt

Digitized by Google

ſunt abſcondita; quippe qui omnes latebras, & receſſus perveſtigavit. Nullatenus tamen meam qualemcumque demoſtrationem non reticebo.

Abſcindatur igitur ab axe XZ ultra parabolæ verticem ſegmentum IC ſubquadruplum parametri IL, ordineturque per C recta DCB, occurratque rectis GK, SQ productis; quatenus efficiatur parabolicum quadrilineum O*n*VDB, in quo [1] erit BO ad VD ut q. CB cum q. IL ad q. CD cum q. IL, nempe ut q. KI cum q. IL ad q. QI cum q. IL, & (ob hyperbolicam ſectionem) ut q. MK ad q. SQ: quare MK ad SQ erit ut radix quadrata ipſius OB ad radicem quadratam rectæ VD: & ordinando quamcumque aliam rectam EF*n*,*u* ad ſecundum axem *yy* erit quidem *u*F ad SQ ut radix quadrata rectæ *n*E ad radicem quadratam rectæ DV; & ſimiliter IN ad SQ erit ubique ut radix quadrata rectæ IC ad radicem qudratam rectæ VD. Rebus ſic ſtantibus.

Rect=lum ſub IN in KQ eandem habebit rationem ad hyperbolicum quadrilineum M*u*SQK, quam productum a radice ipſius IC in KQ ad coacervationem ex radicibus omnium ordinatarum in parabolico quadrilineo O*n*VDB: quocirca rect=lum ſub IN in parabolicum arcum O*n*V ſe habebit ad hyperbolicum quadrilineum M*u*SQK ut productum a radice rectæ IO in eundem arcum O*n*V ad prædictam coacervationem, videlicet (2) in prop=ne æquali.

(1) ex coroll. 2. prop 38.

Similiter reperietur quadrilineum hyperbolicum M*u*FK æquari rect=lo ſub IN in arcum parabolicum O*n*; proindeque quadrilineum M*u*SQK ſe habebit ad quadrilineum M*u*FK ut rect=lum ſub IN in arcum O*n*V ad rect=lum ipſius IN in arcum O*n* vel ut arcus O*n*V ad arcum O*n*; & arcui O*n*V analogum erit in gravitate, &c.

(2) ex prop. 38.

COROLLARIUM I.

Quadrilineum hyperbolicum M*u*SQK erit ad rect=lum IN; QK ut parabolicus arcus V*n*O ad rectam KQ; quandoquidem ipſum quadrilineum rect=lo ſub IN in arcum V*n*O adæquatur.

Digitized by Google

SCHOLIUM I.

Si recta QN cum recta KQ claudat, inter ordinatas KM . SQ triangulum, aut quadrilaterum GHQK, ſumptaque ſit quarta proportionalis QA poſt tres IN . QK . $\frac{1}{2}$ HQ + $\frac{1}{2}$ GK.

Hyperbolicum quadrilineum MuSQK erit ad rectilineum GHQK ut parabolicus arcus VnO ad ipſam quartam proportionalem QA.

Etenim quadrilineum MuSQK jam æquatur producto ab arcu VnO in NI, rectilineum vero GHQK æquatur rect=lo ſub KQ in $\frac{1}{2}$ HQ + $\frac{1}{2}$ GK, vel (ob hypotheſim) rect=lo IN . QA illudque quadrilineum ad hoc rectilineum eſſe debet ut rect=lum arcus VnO in NI ad rect=lum NI . AQ ſcilicet ut arcus VnO ad rectam QA.

COROLLARIUM II.

Quamobrem differentia quadrilinei hyperbolici MuSQK a rectilineo GHQK æquabitur rect=lo ſub ſemitranſverſum IN in differentiam parabolici arcus VnO a recta QA, eritque ad idem rectilineum ut hæc differentia ad rectam QA.

SCHOLIUM II.

fig. 154. Bilineum hyperbolicum SuNM, cujus axis XN, ſe habebit ad tri=lum SNM, in eadem baſe SM, & altitudine XN conſtitutum, ut differentia quartæ proportionalis QA poſt tres IN, IX . SM ſupra parabolicum arcum OIV ad dimidiam differentiæ ipſius quartæ proportionalis ſupra tertiam SM.

Compleatur rect=lum MKQS per rectas MK . SQ ordinatas ad coniugatum axim yy: & cum ponatur IN ad IX, nempe ad $\frac{1}{2}$ MK + $\frac{1}{2}$ SQ, ut SM, ſeu KQ ad QA, erit, convertendo, & per converſionem rationis, IX ad XN ut AQ ad AK, & IX ad $\frac{1}{2}$ XN ut AQ ad $\frac{1}{2}$ AK: atqui bilineum MNuS (differentia ſcilicet hyperbolici quadrilinei MuSQK a parall=mo MKQS) eſt ad ipſum parall=mum (per præcedens corollarium) ut defectus

fectus arcus v*n*o a recta QA ad QA, & hoc parall=mum MK QS eſt ad tri=lum MNS ut IX ad ½ NX, vel ut AQ ad ½ AK; erit ex æquo bilineum MN*u*S ad tri=lum MNS, ut arcus parabolici v*n*o defectus a recta QA ad ½ AK, nempe ad dimidium defectus rectæ SM ab ipſa QA.

THEOREMA XXXVI. Propoſitio 40.

SI exceſſus YI *potentis quadratum ſemiparametri* IL *dati conoidis Parabolici* &IO, *cum q: radii* EO *baſis* &O, *ſupra ipſam ſemiparametrum* IL, *ita dividatur in* R, *ut* YL *ad* RL *ſe habeat in ratione, in qua eſt* 3LI+3YI *ad* LI+2YI: *curva ſuperficies ejusdem conoidis* &IO, *ad baſim* &O *eandem habebit proportionem, quam* RI *ad* IL. fig. 158.

Ab axe IE abſcindantur partes IN. IZ ſemiparametro IL, & inter ſe æquales, & in plano parabolæ &IO, quæ datum conoides genuit, & circa eundem axim IE deſcribatur hyperbola æquilatera PN*u*M, vertices oppoſitos habens in punctis N: Z, centrumque in I, & per punctum O ordinetur recta MOK ad axem coniugatum YK, compleanturque rect=la MKIX. INDK. Et quia q: XI (ob æquilateram hyperbolam) æquatur duobus ſimul qq: IN. XM, nempe qq: IL. OE, vel, ob hypotheſim, unico quadrato *y*I, recta XI, vel MK æquabit *y*I: & XN æquabit *y*L.

Et quoniam parabolicus arcus IO quadrilineo hyperbolico M*u*NIK eſt (1) analogus in gravitate, axis IX intervallum a centro gravitatis arcus IO (puta intervallum EQ) idem erit (2) cum diſtantia ejusdem axis IX a centro gravitatis quadrilinei M*u*NIK; & inſuper idem arcus IO ad ſemiordinatam OE ſe habebit (3) ut quadrilineum M*u*NIK ad rect=lum NIKD; ideſt in prop=ne compoſita ex ratione ejusdem quadrilinei M*u*NIK ad trapetium MNIK (ſeu ratione (4) rect=li YL × RI ad rect=lum OEQ) & ex ratione trapetii MNIK ad rect=lum NK, ſeu ratione MK+IN. 2IN, vel ratione *y*I+IL. 2IL: unde colligitur, quod quadrilineum M*u*NIK ad rect=lum NIKD, vel arcus IO ad rectam OE, ſe habebit ut productum ab RI in rect=lum *y*L × *y*I+IL, vel in rect=lum ZXN, vel in q: XM, ſeu in q:

(1) ex prop. 39.
[2] ex mechanic.
(3) ex coroll. 1. prop. 39.
[4] ex coroll. prop. 13.

in q: OB. ad productum a 2 LI in rect=lum OEQ, vel potius ut rect=lum RI×OB ad duplum rect=li EQ×IL.

Quare proportio, in qua eſt curva ſuperficies conoidis OI ♁ ad circulum ♁ O, & quæ componitur (1) ex ratione arcus IO ad OE radium circuli [ſeu ratione rect=li RI×OE ad duplum rect=li EQ×IL] & ex ratione EQ. ½ EO (vel ratione dupli rect=li EQ×IL ad rect=lum EO×IL) ſimilis erit rationi rect=li RI×OE ad rect=lum LI×OE, ſcilicet rationi RI. IL. Quod, &c.

(1) exn. I. ſupp. I.

COROLLARIUM I.

Ex progreſſu demonſtrationis conſtat arcum parabolicum OI eſſe ad ſemiordinatam OE ut rect=lum RI×OE ad duplum rect=li EQ×IL.

SCHOLIUM I.

Idem arcus IO ſe habebit ad axim IE ut RI ad EQ.

Nam proportio arcus IO ad rectam OE, ſive proportio rect=li arcus IO in OE ad q: OE, vel (ob parabolam) ad duplum rect=li EIL ſimilis eſt rationi rect=li RI×OE ad duplum rect=li EQ×IL; & permutando eſt rect=lum arcus IO in OE ad rect=lum RI×OE, ſive arcus IO ad rectam IR ut duplum rect=li EIL ad duplum rect=li EQ×IL ſive ut EI ad EQ, & iterum permutando, erit arcus IO ad EI ut IR ad EQ. &c.

SCHOLIUM II.

Ab indicata ſimilitudine, quæ reperitur inter relationem RI. LI, & inter correlationem curvæ ſuperficiei conoidis parabolici ♁ IO ad baſim ♁ O infertur propoſitio 54. alio progreſſu a nobis ſuo loco demonſtranda: ſcilicet, quod utraque harum proportionum æquatur rationi, quam habet defectus cubi ex ſemiparametro IL a cubo rectæ L*y*, potentis q: ejuſdem ſemiparametri IL, quadratumque ſemidiametri OE baſis O ♁ ad ſeſquialterum producti ab ipſamet ſemiparametro IL in q:

præ-

Digitized by Google

præfatæ ſemidiametri OE, vel potius in differentiam quadratorum YI . LI.

Etenim aggregatum qq: YI . LI rect=lique YIL æquatur ſeſquialtero rect=lorum YIR . LIR (ut mox oſtendetur) ac propterea productum ab YL in prædictum aggregatum [ſcilicet (1) differentia cuborum YI . LI] æquiparabitur producto ad YL in ſeſquialterum rect=lorum YIR . LIR, nempe æquiparabitur ſeſquialtero producti ab RI in differentiam (2) qq: YI . LI: proportionique differentiæ cuborum YI . LI ad ſeſquialterum producti ab IL in differentiam qq: YI . LI aſſimilabitur proportio, quam habet ad ſeſquialterum hujus producti, ſeſquialterum producti ab RI in ipſam differentiam qq: YI . LI, vel quam habet RI ad IL, & per conſequens etiam proportio curvæ ſuperficiei conoidis &IO ad baſim &O.

(1) *vide infra coroll. 4. lemm. VII ſive propoſitionis LI.*

[2] *prop. 4. Elem. 2.*

Remanet nunc demoſtranda æqualitas inter aggregatum qq: YI . LI rect=lique YIL, & inter ſeſquialterum duorum ſimul rect=lorum YIR . LIR: quæ provenit ex ſimilitudine, quam ex hypotheſi habent interſe relationes YL . RL; 3YI + 3LI . LI + 2YI; nam dividendo, erit YR ad RL ut 2LI + YI. ad LI + 2YI; productumque ab extremis terminis producto a medliis; nempe 2IYR + YR×LI æquabitur 2RLI + RL×YI & addito hinc inde 2IL² + 2YIR, efficietur 2YI² + 2LI² + RY×LI æquale 2RIL + 2YIR + RL×YI; & ſuperaddito hinc inde 2RIL + YR×LI efficietur 2YI² + 2LI² + 2YIL æquale 3RIL + 3YIR, demumque YI² + LI² + YIL æquiparabitur $\frac{3}{2}$ RIL + $\frac{3}{2}$ YIR. Quod, &c.

THEOREMA XXXVII. Propoſitio 41.

SI defectus YT *recta* TI *potentis quadratum ſemiparametri* IL *parabolici conoidis* HIV, *cum q: ſemidiametri* DO *circuli ordinati* A&, *a recta* YI *potente q: ejuſdem ſemiparametri* IL *cum q: radii* CR *baſis* HV, *ita dividatur in* R *ut* YT *ad* TR *ſe habeat in ratione in qua eſt* 3TI + 3YI *ad* TI + 2YI: *curva ſuperficies fruſti* HAOV *ex conoide parabolico* HIV *eandem proportionem habebit ad differentiam baſium* HV : AO, *quam* RI *ad* IL. *fig. 159.*

A co-

A conoidis axe abſcindantur ſegmenta IN . I & ſemiparametro IL, & inter ſe æqualia: & in plano parabolæ HIV, quæ conoides procreavit, deſcribatur circa eundem axem æquilatera hyperbola SNP, vertices oppoſitos habens in punctis N &, centrumque in I, quæque ſecetur in M . S a rectis KOM . QYS ordinatis ad coniugatum axem yQ per puncta V O: completisque rect=lis IKMX . IQSG, quadratum XI æquabitur q: KM, vel (ob hyperbolam æquilateram) quadratis ſimul IK . IL, vel OD . IL, ſeu (ex hypotheſi) quadrato TI, ac recta XI rectæ TI æqualis erit; & pari modo recta IG rectæ Iy æqualis reperietur.

(1) ex corollar. prop 13. Et quia hyperbolicum quadrilineum SeMKQ eſt (1) ad trapetium SMKQ ut rect=lum yT×RI ad rect=lum ſub FV in diſtantiam axis IG a centro gravitatis ipſius quadrilinei, vel parabolici arcus VO, eidem quadrilineo (2) analogi in gravitate (puta in diſtantiam Cm) trapezium vero SMKQ eſt ad rect=lum AEKQ ut SQ + KM ad 2IN, vel ut yI + TI ad 2LI: proportio igitur quadrilinei SeMKQ ad rect=lum AK, vel ipſi æqualis (3) correlatio parabolici arcus OnV ad rectam VF, componetur ex ratione rect=li yT×RI ad rect=lum FV×Cm & ex ratione $\overline{y\text{I} + \text{TI}}$. 2IL, & æquabitur rationi quam habet productum $\overline{y\text{I} + \text{TI}}$×$y$T×RI ad productum 2LI×FV×Cm vel quam productum ab RI in differentiam quadratorum yI . TI, vel quadratorum GI . XI, vel potius, [ob hyperbolam æquilateram] in differentiam qq: SG . MX ſeu quadratorum CV DO, ſeu in rect=lum HFV, ad productum 2LI×FV×Cm, vel quam habet rect=lum RI×HF ad duplum rect=li LI×Cm.

(2) prop. 39.

(3) ex prop. 39. coroll. 1.

(4) ſupp. 1. Atqui proportio, in qua eſt curva ſuperficies parabolici fruſti VOaH ad differentiam baſium ſeu circulorum ex radiis VC . DO (4) componitur ex ratione arcus VnO ad rectam VF nempe ratione rect=li RI×HF ad rect=lum 2IL×Cm; & ex ratione Cm . $\frac{1}{2}$CV + $\frac{1}{2}$CF, vel rect=li 2IL×Cm ad rect=lum ex 2IL, in $\frac{1}{2}$CV + $\frac{1}{2}$CF; ac propterea æquatur rationi, quam habet rect=lum RI×HF ad duplum rect=li ſub IL in $\frac{1}{2}$CV + $\frac{1}{2}$CF, ſeu ad rect=lum ſub IL in CV + CF, vel ad rect=lum IL×HF; conſimilis erit etiam rationi RI . IL. Quod, &c.

CO

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Ex demonſtratione conſtat arcum onv eſſe ad rectam vf in proportione compoſita ex ratione ri ad il, & ex ratione, quam habet vc ad cr, vel unica hf ad 2cm.

SCHOLIUM

Similiter reperietur quod arcus hio ad rectam hf ſe habebit in proportione compoſita ex ratione ri ad li, & ex ratione in qua eſt vf ad duplum intervallum axis ic a centro gravitatis ejuſdem arcus hio.

LEMMA V. Propoſitio 42.

Datam rectam lineam b& *jam diviſam in* l, *ſecare in alio puncto* y *inter illud* l, & *inter præſcriptum terminum* &, *ut rectangulum* by& *ex duobus ſegmentis* by, y& *ſe habeat ad quadratum* yl *in data ratione* r, s. *fig.* 160.

Supra rectam b& deſcribatur ſemicirculus bi&, & a tangente a& abſcindatur ſegmentum a& ſe habens ad l& in proportione ſubduplicata rationis datæ r, s; quatenus relatio quadrati a& ad q. &l conſimilis ſit datæ rationi r, s; deinde jungatur recta al, quæ ſemicirculi arcum ſecabit in aliquo puncto, puta i, a quo agatur ſinus iy: dico rectam b& diviſam eſſe in hoc puncto y juſta quæſitum.

Nam rectangulum by&, æquans quadratum yi, ſe habebit ad q. yl ut q. yi ad idem q. yl, vel ut q. a& ad q. l&, ſcilicet in data ratione r, s, &c.

LEM-

LEMMA VI. Propoſitio 43.

fig. 160. *Data recta lineæ* BL *addere hujuſmodi ſegmentum* yL *ut ipſius quadratum cum triplo quadrati* yB *ſit ad triplum rect=li* yBL *in data ratione* ab . bd *majoris inæqualitatis.*

Producatur LB in & ita ut L& ad LB ſit ut *ad* ad *db*, & per præcedens lemma; dividatur recta B& ita inter puncta & L in *y*, ut rect=lum B*y*& ſubtriplum ſit quadrati *y*L; quatenus triplum rect=li B*y*& æquetur quadrato *y*L. Dico quod ſegmentum *y*L additum rectæ BL quæſito ſatisfacit.

Cum triplum rect=li B*y*& æquet q: *y*L, erit &*y* ad *y*L ut *y*L ad 3*y*B; & componendo erit &L ad L*y* ut *y*L + 3*y*B ad 3*y*B & ideo rect=lum &L . 3*y*B rect=lo L*y* . L*y* + 3*y*B, vel potius $Ly^2 + 3ByL$ æquiparabitur; atque proportio, quam habet $Ly^2 + 3ByL$ ad 3*y*BL ſimilis erit rationi in qua eſt &L . 3*y*B ad 3*y*BL, ſeu rationi &L . BL vel rationi *da* . *db*: & componendo erit $Ly^2 + 3ByL + 3yBL$ (nempe $Ly^2 + 3yB^2$) ad 3*y*BL ut *ab* ad *bd*., &c.

PROBLEMA I. Propoſitio 44.

fig. 158. *A Dato conoide parabolico infinite longo; portionem rectam* &IO *abſcindere, cujus curva ſuperficies ſe habeat ad baſim* &O *in data proportione* R . S *majoris inæqualitatis.*

Eſto LB parameter conoidis dimidiatus in vertice L, & exiſtens in plano parabolæ &IO, quæ ipſum conoides genuit; ordinatiſque æquidiſtet: & per præcedens Lemma addatur rectæ LB hujuſmodi ſegmentum *y*L ut quadratum *y*L cum triplo quadrati *y*B ſe habeat ad triplum rect=li *y*BL, ſcilicet ad ſextuplum rect=li *y*BI, in data ratione R . S: poſtmodum ut q: LI ad ipſius defectum a q: *y*I ita fiat quadrans parametri LB ad IE, & per punctum E ordinetur circulus &O.

Dico quod curva ſuperficies portionis conoidalis &IO ſe habe-

habebit ad circulum ♂ o ut q: y L cum triplo q: y B ad ſextuplum rect=li y B I, videlicet in data ratione R . S, ex conſtructione.

Fiat I N æqualis I L, & in plano ſupradictæ parabolæ, circa eundem axem E N deſcribatur hyperbola æquilatera M N P, verticem habens in N, centrum vero in I, & a termino O ordinatæ ♂ O in illa parabola, agatur recta K O M ad axem E N parallela, & quæ cum hyperbolica curva claudat quadrilineum M N I K arcui parabolico I O (1) analogum in gravitate. (1) ex prop. 39

Et quia q: L I ad ipſius defectum a q: y I eſt per conſtructionem ut parametri B L quadrans ad I E, ſcilicet ut quadrans quadrati L B ad rect=lum L B × I E vel ut q: L I ad q: E O; hoc q: E O illi defectui æquabitur, ac propterea quadratum y I, duobus ſimul qq: I L . E O, vel qq: I L . I K, vel (ob hyperbolam) unico quadrato K M æquale erit: & y B erit aggregatum, at y L erit differentia baſium M K . I N quadrilinei hyperbolici M N I K.

Præterea completo rect=lo N I K D, quadrilineum M N I K [2] erit ad rect=lum N K ut parabolicus arcus I O ad O E: at axis N E diſtantia a centro gravitatis quadrilinei M N I K ad diſtantiam ejuſdem axis a centro gravitatis rect=li N K, nempe ad dimidium ipſius E O, eſt ut axis intervallum a centro gravitatis arcus I O ad intervallum axis a centro gravitatis rectæ O E, ſcilicet ad ipſius E O dimidium: unde infertur quod curva ſuperficies genita circa axem N E ab arcu parabolico O I ad circulum radii O E (videlicet curva ſuperficies conoidis ♂ I O ad baſim ♂ O) ſe habebit ut ſolidum ſimiliter progenitum a quadrilineo M N I K ad cylindrum factum a rect=lo K H, vel potius (3) ut q: y L cum triplo q: y B ad ſextuplum rect=li y B I, &c. (2) ex coroll. 1. prop. 39. (3) per ſchol. prop. 16.

THEOREMA XXXVII. Propoſitio 45.

SI ad alteram partem axis B T *parabolæ* P V I *& ordinatæ ſint duæ rectæ* V R . P T; *& quadruplum quadratum minoris* V R *ad q: majoris* P T *ſit ut ſemiparametri* I L *quadratum ad hoc q: una cum q: prioris ſemiordinatæ* R V. fig. 161.

Poſterior ſemiordinata T P *ſe habebit ad exceſſum majoris arcus*

cus

cus parabolici P V I. *ſupra duplum minoris arcus* V I. *ut quadratum ſemiparametri* I L *ad q: prioris ordinatæ* R V.

Completo rect=lo O *n* Q V ſub integra ordinatam V O in abſciſſam R I, & facta I B æquali I L, deſcribatur circa axem T I hyperbola æquilatera A B S, centrum habens in I, verticem in B; poſtea protractis rectis O *n*. Q V ad hyperbolam in A, S, claudatur rect=lum A *n* Q S per junctam A S, quæ ad axem I X erit ordinata: & a centro L agatur per S recta I F, quæ hyperbolæ diameter erit; & ad hanc diametrum I F ordinetur a puncto B recta B F M, quæ tangenti verticali (puta N S) (1) æquidiſtabit; & a punctis F, M ducantur rectæ F G, M K ad axem X I parallelæ; ſumaturque I *a* quarta proportionalis poſt I B. I K. ½MK+½BI, ſcilicet poſt tres IB.IK.GF (quippe GF æquat ſemiſſem duarum ſimul MK.IB) quatenus trapetio MBIK. æquiparetur rect=lum BI*a*.

(1) *ex com. Elem. lib. 1. prop. 47.*

Et cum, ob tangentem SN [2] relatio XI.IB rationi BI.IN, ſeu FI.IS ſit conſimilis, inter ſe æquabuntur hyperbolica bilinea ABS.BSM, ut ad propoſitionem 35. innuimus. Et quia ex hyperbolæ æquilateræ natura, differentia qq: XI.BI quadrato SX, vel quadrato RV eſt æqualis; quadratum XI ſummæ qq. IB.RV, vel quadratorum IL.RV æquabitur; atque relatio q: IL ad q: XI ſimilis erit rationi ejuſdem quadrati IL ad q: IL cum q: RV, vel (ob hypotheſim) rationi, quam habet quadruplum q: RV ad q: TP, ſeu rationi q: OV ad q: TP.

[2] *lib. 1. conic. prop. 37.*

Quia vero V O dupla eſt ipſius IQ, & IK dupla partis IG; relatio OV.IK rationi IQ.IG, vel SI.IF, vel rationi IN.IB, ſive IB.IX aſſimilabitur; ratioque quadrati OV ad q: IK rationi q: IB ad q: IX, ſeu quadrati IL ad q: IX, vel rationi q: OV ad q: TP conſimilis erit; quare rectæ IK. TP inter ſe æquabuntur, atque recta KM axi IX æquidiſtans, tranſire debet per punctum P, producta ſi opus fuerit.

Ulterius cum IB ad IX (nempe ad dimidium ſummæ baſium æqualium SQ.A*n* hyperbolici quadrilinei SBA*n*Q) ſit ut OV, vel *n*Q ad IK; ideoque IK ſit quarta proportionalis poſt tres IB. *n*Q. IX; rect=lum ſub IB in exceſſum rectæ IK ſupra parabolicum arcum VIO, vel ſupra duplum arcus VI, æquabitur (3) exceſſui quadrilateri A*n*QS ſupra quadrilineum hyper-

(3) *coroll. 2. prop. 39.*

hyperbolicum SBA*n*Q, ideſt hyperbolico bilineo ABS, ſeu bilineo MSB.

At huic bilineo MSB, nempe exceſſui trapetii MBIK ſupra quadrilineum MSBIK æquatur rect=lum ſub IB in exceſſum rectæ *a*I ſupra arcum PI; quandoquidem ipſa *a*I, per conſtructionem eſt quarta proportionalis poſt tres IB.IK.GF; hoc igitur rect=lum æquabitur rect=lo ex IB in exceſſum rectæ IK ſupra duplum arcus VI; & huic exceſſui æqualis erit exceſſus rectæ *a*I ſupra arcum PI: & permutando exceſſus *a*K rectæ I*a* ſupra rectam IK æquabitur exceſſui arcus PI ſupra duplum arcus VI.

Denique relatio IB.IX ſimilis eſt rationi IN.IB, vel IS.IF, vel rationi QS.FG, ſeu XI.FG: unde quadratum IB ad q. IX erit ut IB ad GF, ſive (ob conſtructionem) ut IK ad I*a*: & dividendo erit IK, ſeu TP ad K*a* (nempe ad exceſſum arcus PI ſupra duplum arcus VI) ut q. IB ad differentiam qq: IX. IB, vel ut q: IL ad q: SX, ſeu ad q: RV, &c.

PROBLEMA II. Propoſitio 46.

AD axem IZ *datæ ſemiparabolæ infinite longæ duas ordinare rectas* PT.RV. *quarum major* PT *ſe habeat ad exceſſum arcus* VI *ſupra duplum arcus* VI *in data quacumque proportione* S.T. *fig. 162.*

Eſto IL parameter, & ab axe IZ protracto ultra verticem I abſcindatur pars IH ſubquadrupla ipſius IL, & per conſequens ſubdupla ſemiparametri IO; quatenus q: IO æquetur rect=lo HIL; datæque rationi S.T conſimilis fiat relatio IH.IR: & ut IH ad HR ita fiat 4IR ad IT, & a punctis R.T ordinentur rectæ RV.TP: dico ſolutum eſſe problema.

Etenim ut IH ad IR ita eſt rect=lum HIL ad rect=lum RIL, vel ita q: IO ad q: VR: unde quadratum IO ad q: IO cum q: VR erit ut IH ad HR, vel, per conſtructionem, ut 4IR ad IT, vel potius ut quadruplum q: VR ad q: PT; ob parabolam: ordinata igitur PT ad exceſſum arcus PI ſupra duplum arcus VI erit (1) ut q: IO ad q: VR, vel ut IH ad IR, ſcilicet in data ratione S.T.

(1) per præcedentem prop.

SCHOLIUM.

Conſideratione non indignum puto, quod ubi ordinatæ majoris PT abſciſſa TI dupla ſit parametri IL, abſciſſa vero RI minoris ordinatæ VR ſubquadrupla ſit ipſius parametri IL, proindeque ſuboctupla illius abſciſſæ TI: prior ordinata PT æquiparabitur defectui dupli arcus minoris VI ab arcu majori PI.

Quandoquidem proportio, quam habet 4IR ad IT erit ſubdupla, atque relationi IH.HR conſimilis, ac propterea ordinata PT ad defectum dupli arcus VI ab arcu PI ſe habebit ut IH ad RI, ſcilicet in proportione æquali.

PROBLEMA III. *Propoſitio 47.*

fig. 163. D*Ata parabolica curva* &IV *ſe referente ad axem* ZZ, *a qua, per duas quaſcumque diametros* C&.Da *abſciſſus ſit arcus* & a: *alium arcum, in ipſa curva, aſſignare, cujus exceſſus, aut defectus a dato arcu* a &. *æquetur datæ rectæ* bd.

Ab axe ZX abſcindantur ſegmenta IZ.IB ſemiparametro, & inter ſe æqualia; protractiſque diametris C& A.Da E uſque ad verticalem ordinatam es in C, D dimidietur diſtantia CD in F, compleanturque tri-la CZI.FZI.DZI rect=la in I. his poſitis animadvertendum eſt, quod ubi aſſignandus arcus deficere debeat a dato arcu *a &*; quarta proportionalis (puta I*e*) poſt ſemiparametrum IB, poſt diſtantiam CD diametrorum C& . D*a*, & poſt dimidium ſummæ duarum rectarum CZ.DZ (quarum altera DZ poſſit quadratum ſemiparametri LZ cum q: diſtantiæ DI, & reliqua CZ poſſit quadratum diſtantiæ CI cum quadrato ſemiparametri IZ) ſe habeat ad datam rectam *bd* in proportione majori, quam duplicata rationis illius ſummæ DZ, CZ ad duplam diſtantiam IF verticis I a puncto E dimidiante ſupradictam diſtantiam CD.

Applicetur nunc in angulo recto CIZ per punctum medium

dium F diſtantiæ CD recta FR æquans dimidium ſummæ ipſarum CZ.DZ, quæ coniunctam FZ excedet (ut infra patebit) ideoque IR excedet IZ ∴

Et inventa quarta proportionali I*e* poſt tres IB.CD.FR; proportio q: RB ad q: RI (quæ eſt proportio non deficiens) major erit ratione I*e*.I*e*+*bd*, quæ minoris eſt inæqualitatis.

Immo ubi arcus aſſignandus deficere debeat a dato arcu *a &*, proportio quadrati RF ad q: RI major erit etiam I*e*.I*e*—*bd*; quandoquidem ponitur in hoc caſu I*e* ad *bd* majorem habere rationem, quam duplicatam rationis ſummæ rectarum CZ.DZ ad duplam FI, vel quam duplicatam rationis, in qua eſt dimidium FR illius ſummæ ad FI, vel potius majorem habere rationem, quam q: FR ad q: FI; & per converſionem rationis, quadratum RF ad q: RI in majori eſt ratione, quam I*e* ad I*e*—*bd*.

Præterea a puncto R applicetur in angulo recto RIN recta RN ad cujus q: ſe habeat quadratum RF (ubi inveniendus arcus excedere debeat datum arcum *a &*) ut I*e* ad I*e*+*bd*, & (in reliquo caſu) ut I*e* ad I*e*—*bd*: & in utroque caſu, ut FR ad RN ita fiat FD ad NK & ita DC ad duplam KS ipſius KN; & a punctis K.S ductis parabolicæ curvæ diametris KTQ. SVM: dico quod parabolicus arcus TV problema reſolvet.

Ad hoc demonſtrandum deſcribatur circa axem BX æquilatera hyperbola HBO, centrum habens in I, verticem vero in B, rectiſque CA.DE occurrat in A.E; ac rectæ FH, iiſdem parallelæ occurrat in H. Et quoniam [ob ipſam hyperbolam] quadratum AC æquatur duobus ſimul quadratis CI.BI, ſeu CI.FZ, vel potius unico quadrato CZ, recta AC rectæ CZ par erit, pariterque rectæ FH.DB rectis FZ.DZ æquales reſpective reperientur: & jungendo rectam AE quæ HB protractam ſecet in G, notum eſt GF ſubduplam eſſe duarum ſimul AC.DE, vel duarum ſimul CZ.DZ, & excedere HF, ſeu FZ, unde FR æquabit FG, & excedet FZ, ut ſuperius aſſumpſimus.

Ulterius ordinando a puncto N rectam NO ad ſecundum axem IN hyperbolæ, ipſa NO poterit duo ſimul quadrata RI.IZ, proindeque ipſi NZ adæquabitur, deficietque ab NR:

fiat

fiat igitur huic NR æqualis NP, & per P applicetur, in hyperbola ABM, ea recta QM, quæ ab ipſo puncto P dimidiatur (quod obtinebimus ordinando per P rectam QM ad hyperbolæ diametrum ductam per P, & per centrum I) & ab hujus rectæ QM terminis agantur rectæ Q *n*. M *m* parallelæ ad PN.

Et cum PN æquet RN., per conſtructionem, & ON rectam NZ; differentia quadratorum PN.ON æquabitur differentiæ qq: RN.ZN, ſeu quadratorum RI.ZI, vel quadratorum FR.

[1] *ex prop.* 36. FZ, vel quadratorum GF.HF; ac propterea bilinea AHE.QOM inter ſe [1] erunt æqualia; & amplius CD ad *nm* (2) ſe habe-

(2) *ex prop.* 37. bit ut AC+ED ad Q*n*+M*m*, vel ut GF ad PN, ſive [ob conſtructionem) ut CD ad KS: unde eſt quod rectæ *mn*, KS inter ſe erunt æquales, & (cum ab eodem puncto N dimidientur) ſibi ipſis omnino congruent.

Præterea rectilineum ACDE ad rectilineum QKSM ſe habe-

(3) *ex corollar. prop.* 37. bit [3] in proportione duplicata rationis GF.PN, ſeu rationis FR.RN, ſcilicet ut IE ad ſummam [ubi arcus VT debeat eſſe major arcu *a &*] & ad differentiam ipſarum I*e*.*bd*, in reliquo caſu, ſive ut rect=lum ſub IB in I*e* ad rect=lum ſub IB in prædictam ſummam, aut differentiam.

At cum RF, nempe dimidium aggregati baſium AC.DE quadrilateri AEDC, ſit ad I*e* ut 4B ad CD, per conſtructionem; idem quadrilaterum rect=lo IB, I*e* æquale erit; ergo & quadrilaterum QKSM rect=lo ſub IB in ſupradictam ſummam, aut differentiam rectarum I*e*, *bd* adæquabitur, ratioque IB.NP conſimilis erit rationi, quam habet KS ad ipſam ſummam, aut differentiam rectarum I*e*, *bd*.

Denique rect=lum ſub IB in exceſſum rectæ I*e* ſupra arcum

(4) *ex coroll.* 2. *prop.* 39. *a &* (4) æquatur bilineo AHE, & per conſequens bilineo QOM, ſive rect=lo ſub IB in exceſſum prædictæ ſummæ, aut differentiæ rectarum I*e*, *bd* ſupra arcum TV: hic igitur exceſſus æquabitur illi exceſſui: hoc eſt exceſſus rectæ I*e* ſupra arcum *a &* æquabitur exceſſui ſummæ aut differentiæ rectarum I*e*, *bd* ſupra arcum TV: & permutando, exceſſus arcus TV ſupra arcum *a &* æquabitur exceſſui ſummæ rectarum I*e*.*bd* ſupra I*e*, nempe æquabitur datæ rectæ *bd*, vel reſpective defectus arcus TV ab arcu *a &* æquabit defectum ipſius I*e*—*bd* ab I*e*, ſcilicet æquabit datam rectam *bd*, &c.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA IV. Propoſitio 48.

AD ſecundum axim Y A *data hyperbolæ* A B M *ordinare duas rectas* M K . Q S *ad alteram partem primi axis* X Z, *ita ut rect=lum ſub abſciſſam* K I, *a majori ordinata* M K, *in ſemilatus tranſverſum* I L *ejuſdem ſecundi axis* Y A *ad exceſſum hyperbolici quadrilinei* M S Q K *inter ambas ordinatas* M K . Q S *comprehenſi, ſupra quadrilineum hyperbolicum* S B I Q *abſciſſum a minori ordinata* S Q, *& a primo axe* X Z, *ſe habeat in data ratione* R *ad* S. *fig.* 161.

Datæ rationi R ad S conſimilis fiat relatio quadrati L I ad q: I Q, & ut q: I L ad q: I L cum q: I Q ita fiat quadruplum q: I Q ad q: I K, & a punctis Q . K ordinentur rectæ Q S . K M: dico has ordinatas quæſito ſatisfacere.

Ad hoc demonſtrandum, circa axim X Z deſcribatur parabolica curva O I P, verticem habens in I, cujus ſemiparameter ſit I L, ſeceturque in V . P ab ordinatis S Q . K M, & ab ipſis punctis V . P ordinentur rectæ V R . P T.

Et quia per conſtructionem, quadratum I L ad q: I L cum q: I Q, ſeu cum q: R V eſt ut quadruplum q: I Q, vel q: R V ad q: I K, ſeu ad q: P T; proportio, quam habet ordinata P T ad exceſſum arcus P V ſupra arcum I V ſimilis (1) erit rationi q: I L ad q: I Q, ſcilicet datæ rationi R ad S. (1) *ex prop.* 45.

Atqui hyperbolicum quadrilineum M S B I K æquatur (2) rect=lo ſub I L in parabolicum arcum I V P, & eidem arcui eſt analogum in gravitate; proindeque exceſſus quadrilinei hyperbolici M S Q K ſupra quadrilineum S B I Q æquatur producto ab I L in exceſſum arcus parabolici P V ſupra arcum V I; rect=lum igitur K I L eamdem habebit rationem ad illum exceſſum, quam ad hoc productum, ſcilicet, quam I K, ſeu T P ad exceſſum arcus P V ſupra arcum I V, vel potius datam habebit proportionem R ad S, &c. [2] *ex prop.* 39.

PRO

PROBLEMA V. Popoſitio 49.

fig. 163. *Datis duabus ordinatis* AC . DE *ad ſecundum* yy *ex axibus datæ curvæ hyperbolicæ* AHBO, *quæ cum ipſa curva, & cum ipſo axe* yy *claudant quadrilineum* AHEDC: *ordinare ad eundem axem* yy *duas rectas* QK . MS *claudentes hujuſmodi quadrilineum* MOQKS, *ut ipſius differentia ab illo quadrilineo* AHEDC *æquetur dato rectangulo* fg. *At* (*ubi aſſignandum quadrilineum a dato quadrilineo* AHEDC *deficere debeat*) *oportet rectilineum* AEDC *clauſum per cordam* AE *ſe habere ad datum rect=lum* fg *in majori prop=ne, quam quadratum ſummæ ordinatarum* AC . DE *ad quadratum duplæ diſtantiæ* IF *centri* I *a puncto* F *dimidiante diſtantiam* CD *illarum ordinatarum* AC . ED.

Ab axe IX abſcindatur ſegmentum IZ æquans ſemitranſverſum IL axis *yy*, rect=loque *fg* æquale fiat rect=lum ſub IZ in aliam rectam *bd*, & jungantur rectæ CZ . DZ, quæ ordinatis AC . DE æquabuntur quandoquidem utraque duarum AC . CZ poteſt duo ſimul qq: CI . IL, & utraque duarum DE . DZ poteſt duo ſimul qq: DI . IL.

Deinde inventa quarta proportionali I*e* poſt IZ, CD, & dimidium ſummæ duarum AC . DE ſeu duarum CZ . DZ; quatenus rect=lum IZ . I*e* rectilineo AEDC adæquetur; proportio hujus rect=li IZ, I*e* ad rect=lum IZ, *bd* (nempe proportio I*e* . *bd*) conſimilis erit rationi rectilinei AEDC ad ipſum rect=lum IZ, *bd*, vel ad rect=lum *fg*, & (ob hypotheſim) major erit (ubi aſſignandum quadrilineum deficere debeat a dato quadrilineo AHEDC) ratione in qua eſt q: ſummæ rectarum AC . ED, ſeu CZ . DZ ad quadratum duplæ FI. His poſitis.

Deſcribatur circa eundem axem IZ parabolica curva & IV, verticem habens in I, ſemiparametrumque æqualem ipſi IL, & quæ ſecetur a rectis AC . DE in & *a*: poſtmodum in hac curva (1) aſſignetur hujuſmodi arcus VT, ut ipſius differentia ab arcu & *a* æquetur rectæ *bd*, ita ſcilicet ut (ubi aſſignandum quadrilineum excedere debeat datum quadrilineum AHEDC)

(1) ex prop. 47

ipſe

ipſe arcus TV major ſit arcu $a\&$, ſitque minor in reliquo caſu: & per puncta T. V agantur rectæ KQ. SM ad axem IX æquidiſtantes: dico, quod hyperbolicum quadrilineum MOQKS erit illud, quod quæritur.

Jam parabolica curva $\&$IV hyperbolico ſpatio AHBOMSC eſt analoga in gravitate, quadrilineumque AHEDC producto a recta IL in arcum parabolicum $a\&$ (1) adæquatur, pariterque quadrilineum MOQKS producto ab ipſa IL in arcum VT eſt æquale: & quia recta bd, per conſtructionem, eſt differentia arcus VT ab arcu $a\&$; rect=lum bd in IL (nempe rect=lum fg illi æquale per conſtructionem) erit differentia producti ab IL in arcum TV a producto ex IL in arcum $a\&$, ſcilicet differentia quadrilinei MOQKS a qudrilineo AHEDC. Quod, &c. (1) ex prop. 39.

PROBLEMA VI. Propoſitio 50.

Dato ad alteram partem axis IZ *parabolicæ curvæ arcu* PV, *ita inter duas ſemiordinatas* PT : VR *conſtituto, ut quadruplum quadrati minoris ſemiordinatæ* VR *ad q: majoris* PT *ſe habeat ut ſemiparametri* IO *quadratum ad hoc q: ſimul cum q: prioris ſemiordinatæ* VR. fig. 162.

Abſcindi poteſt ab ipſa curva arcus, qui dati arcus VP *ſit duplus.*

Ut quadratum ſemiparametri IO ad q: minoris ſemiordinatæ VR ita fiat major ſemiordinata PT ad rectam X, & producta ſemiordinata VR in D, aſſignetur (1) arcus MN, cujus exceſſus ſupra arcum VID æquet duplum rectæ X: Dico hunc arcum MN duplum eſſe dati arcus PV. (1) ex prop. 47.

Cum PT ad X ſit, per conſtructionem, ut IO^2 ad UR^2, ſcilicet (2) ut PT ad exceſſum arcus PI ſupra duplum arcus VI, ſeu ad exceſſum arcus PV ſupra arcum VI; patet hunc exceſſum æquari rectæ X, ideoque exceſſum dupli arcus PV ſupra duplum VID arcus VI, æquari duplo rectæ X, vel exceſſui arcus MN ſupra arcum VID, demumque arcum MN æquari duplo arcus PV. Quod, &c. (2) prop. 45.

Digitized by Google

LEMMA VII. Propoſitio 51.

Fig. 164. *Datis duabus rectis inæqualibus* AB . BC *quarum major ſit* AB, *datiſque tribus numeris* m . n : u, *quorum primus* m *reliquis duobus ſimul ſumptis æquetur*.

Dico quod differentia, quæ eſt inter poteſtates rectarum AB . BC *indicatas per majorem numerum, æquatur duobus productis, primum nempe ex* AB^n *in* $AB^u - CB^u$ (*factum a poteſtate alterius rectæ* AB *denominata ab altero* n *minorum numerorum in differentiam poteſtatum utrarumque rectarum* AB . BC, *indicatarum per reliquum numerum* u) *ſecundum autem a* CB^u *in* $AB^n - CB^n$ [*factum a poteſtate reliquæ lineæ* CB *denominata a tertio numero* u *in differentiam poteſtatum earundem rectarum, indicatarum per ſecundum numerum* n].

Jam AB^m æquat productum ab AB^n in AB^u, [ſiquidem ex hypotheſi exponens *m* æquatur reliquis *u*+*n*] vel potius æquat productum ab AB^n in CB^u, una cum producta ab AB^n in $AB^u - CB^u$.

Atqui productum ab AB^n in CB^u æquat productum a CB^n in CB^u una cum producto a CB^u in $AB^n - CB^n$.

AB^m igitur adæquabitur aggregato trium productorum, quorum primum eſt AB^n in $AB^u - CB^u$, ſecundum eſt CB^u in $AB^n - CB^n$, atque tertium eſt CB^u in CB^n; quod idem eſt cum CB^m.

Et ablato hinc inde CB^m, neceſſe eſt $AB^m - CB^m$ æquare productum AB^n, $AB^u - CB^u$ una cum producto a CB^u in $AB^n - CB^n$. Quod, &c.

COROLLARIUM I.

Hinc colligitur quod ubi minores numeri *n*. *u* inter ſe ſint æquales, differentia inter poteſtates rectarum AB . BC denominatarum a majori num: *m* æquatur producto a differentia in ſummam poteſtatum earundem rectarum AB, CB indicatarum per alterum minorum numerorum. Scilicet $AB^m - CB^m$ æquat productum ab $AB^n - CB^n$ in $AB^n + CB^n$.

COROLLARIUM II.

Quamobrem ubi major numerus m binario adæquetur differentia quadratorum AB . CB æquabitur rect=lo ſub differentiam AC in ſummam rectarum AB . CB.

Quippe in hoc caſu uterque minorum numerorum n . n æqualium unitatem adæquare debet.

COROLLARIUM III.

Ulterius ubi alter n minorum numerorum n . n unitatem æquet differentia poteſtatum AB^m . CB^m æquabitur producto ab AC in poteſtatem AB^n una cum producto a CB in differentiam poteſtatum AB^n . CB^n.

In hoc enim caſu differentia poteſtatum AB^n . CB^n eſt AC.

COROLLARIUM IV.

Et dum alter n ex minoribus numeris n . n unitatem æquet, atque major numerus m ternario ſit æqualis; differentia cuborum AB . CB æquabitur producto a quadrato AB in AC una cum producto a CB in differentiam quadratorum AB . CB, ſeu cum producto a BC in rect=lum ſub AC, & ſub AB + CB; ſcilicet æquabitur unico producto ab AC in aggregatum rect=li ABC, quadratorumque AB . BC.

Reliquus enim numerus n in hoc caſu æquiparatur binario.

LEMMA VIII. Propoſitio 52.

Data ſerie quotvis numerorum 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. *ab unitate incipientium, datiſque duabus lineis* AB . DB *inæqualibus, quarum differentia ſit* AD, *ſumma vero* AO, *ita ut* BO *æquet* DB. *Fig.* 165.

Dico quod differentia poteſtatum AB . DB, *denominatarum a maximo datorum numerorum, æquabit productum a differentia* AD *linearum in aggregatum ex poteſtate majoris lineæ* AB *denomina-*

minata a num. qui maximo ſubſequitur, ex producto a ſumma AO *linearum in poteſtatem minoris* DB, *ſeu* BO *indicatam per defectum unitatis ab hoc num.,* & *ex productis a poteſtatibus majoris lineæ* AB *indicatis per ſubſequentes numeros, unitati ſuperiores, in poteſtates minoris lineæ* BO *reſpective denominatas a defectibus horum numerorum a prædicto num. qui maximo ſubſequitur. Scilicet*

Dum datam ſeriem componant tres numeri 1. 2. 3; $AB^3 - DB^3$ *æquabit productum ab* AD *in* $AB^2 + AO \times BO^{2-1}$.

Ubi data ſeries continent quatuor numeros 1. 2. 3. 4; $AB^4 - DB^4$ *æquabit productum ab* AD *in aggregatum ex* AB^3, *ex* $AO \times OB^{3-1}$, & *ex* $AB^2 \times OB^{3-2}$.

Dum data ſeries componatur ex quinque numeris 1. 2. 3. 4. 5: $AB^5 - DB^5$ *æquabit productum ab* AD *in aggratum ex* AB^4; *ex* $AO \times BO^{4-1}$; *ex* $AB^3 \times OB^{4-3}$, & *ex* $AB^2 \times OB^{4-2}$.

Ubi ſex numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6. *datam ſeriem componant*: $AB^6 - DB^6$ *æquabit productum ab* AD *in aggregatum ex* AB^5; *ex* $AO \times BO^{5-1}$; *ex* $AB^4 \times OB^{5-4}$; *ex* $AB^3 \times OB^{5-3}$; & *ex* $AB^2 \times OB^{5-2}$. *Et ſic ſucceſſive in infinitum.*

Num. 1. In primo caſu, in quo data ſeries conſtat ex tribus numeris 1. 2. 3., cum patet numerum 3 æquare 2 + 1; ideoque $AB^3 - DB^3$ æquabit (1) productum ab AD in AB^2, cum producto ab DB in $AB^2 - DB^2$, ſeu a DB in rect=lum OAD, ſive ab AD in AOB; vel in $AO \times OB^{2-1}$: patet igitur $AB^3 - DB^3$ æquare productum ab AD in aggregatum ex AB^2, & ex $AO \times OB^{2-1}$: ut primo loco, &c.

(1) cor. 4. preceden.

Et hinc eſt quod productum a DB, ſeu OB in $AB^3 - DB^3$ æquari debet producto ab AD in aggregatum ex $AB^2 \times OB$, & ex $AO \times OB^2$, nempe in aggregatum ex $AB^2 \times OB^{2-1}$, & ex $AO \times OB^{3-1}$.

Num. 2. In ſecundo caſu, in quo data ſeries quatuor numeros 1. 2. 3. 4. continet, numerus 4 æquabit 3 + 1, & idcirco [2] $AB^4 - DB^4$ æquabit productum ab AD in AB^3 cum producto a BD, ſeu BO in $AB^3 - DB^3$, nempe (num. 1.) cum producto ab AD in aggregatum ex $AB^2 \times OB^{2-1}$, & ex $AO \times OB^{3-1}$; unde conſtat, quod $AB^4 - DB^4$ æquat productum ab AD in aggregatum ex AB^3, ex $AO \times OB^{3-1}$, & ex $AB^2 \times OB^{3-2}$.

(2) cor. 3. præced.

Quamobrem productum a BO in $AB^4 - DB^4$ æquari debet producto ab AD in aggregatum ex $AB^3 \times OB$, ex $AO \times OB^3$, & ex

Digitized by Google

$AB^{2} \times OB$, ſcilicet producto ab AD in aggregatum ex $AO \times OB^{4-1}$, ex $AB^{3} \times OB^{4-3}$; & ex $AB^{2} \times OB^{4-2}$.

Num. 3. In tertio caſu, in quo quinque ſunt numeri 1. 2. 3. 4. 5. componentes datam ſeriem, numerus maximus 4 æquat 4 + 1, & idcirco $AB^{5} - DB^{5}$ æquat (1) productum ab AD in AB^{4} cum producto a DB, ſeu BO in $AB^{4} - DB^{4}$, vel (num. 2.) cum producto ab AD in aggregatum ex $AO \times OB^{4-1}$, ex $AB^{3} \times OB^{4-3}$, & ex $AB^{2} \times OB^{4-2}$: quare $AB^{5} - DB^{5}$ æquabit productum ab AD in aggregatum ex AB^{4}, ex $AO \times OB^{4-1}$, ex $AB^{3} \times OB^{4-3}$, & ex $AB^{2} \times OB^{4-2}$. &c. (1) cor. 3. praeceden.

Proindeque productum a BO in $AB^{5} - DB^{5}$ æquabitur producto ab AD in aggregatum ex $AB^{4} \times OB^{5-4}$ ex $AO \times OB^{5-1}$; $AB^{3} \times OB^{5-3}$, & ex $AB^{2} \times OB^{5-2}$.

Num. 4. Ubi ſint ſex numeri 1. 2. 3. 4. 5. 6. datæ ſeriei, maximus 6. æquat 5 + 1, & ideo $AB^{6} - DB^{6}$ (1) productum ab AD in AB^{5} cum producto a DB in $AB^{5} - DB^{5}$ ſive (num. 3.) cum producto ab AD in aggregatum ex $AB^{4} \times OB^{5-4}$, ex $AO \times OB^{5-1}$, ex $AB^{3} \times OB^{5-3}$, & ex $AB^{2} \times OB^{5-2}$: vel potius $AB^{6} - DB^{6}$ æquat productum ab AD in aggregatum ex AB^{5}, ex $AO \times OB^{5-1}$ ex $AB^{4} \times OB^{5-4}$, ex $AB^{3} \times OB^{5-3}$; ex $AB^{2} \times OB^{5-2}$, &c.

THEOREMA XXXIX. Propoſitio 53.

fig. 166.

Defectus conoidis hyperbolici ABD *a cylindro* AEHD, *in eadem baſe* AD *conſtituto, & cujus reliqua baſis* BH *concentrica ſit in* O, *eidem conoidi, ſe habet ad cylindrum* NEHM *in hac baſe exiſtens, & cujus axis ſit ſemilatus tranſverſum* BO, *ut defectus cubi* BO *a cubo* CO *ad ſeſquialterum producti ab* OB *in quadratum* CD.

Eſto BX integrum latus tranſverſum, & VF ſit radius circuli ordinati per punctum medium F axis CB: & quia cylindrum AEHD eſt ad cylindrum ANMD ut altitudo OC ad altitudinem BC, vel ut ſextuplum rect=li XCO ad ſextuplum rect=li XCB, & hoc cylindrum ANMD ad conoides ABD (2) eſt ut ſextuplum quadrati AC ad quadratum AC cum quadruplo quadrati VF, ſive ut ſextuplum rect=li XCB (ob hyperbolam) ad re-

ct=lum

ct=lum XCB. cum quadruplo rect=li XFB, nempe ad rect=lum XBC cum duplo rect=li XCB: erit ex æquo cylindrum AEHD ad conoides ABD ut ſextuplum rect=li XCO ad rectangulum XBC cum duplo rect=li XCB.

Et comparando terminorum differentias ad antecedentes, defectus conoidis ABD a cylindro AEHD ſe habebit ad hoc cylindrum ut 6.XCO−XBC−2XCB ad 6.XCO, ſcilicet ut $4.CO^2+4.BO^2+4.COB$ ad 6.XCO, vel potius [ſumptis ſubquadruplis] ut quadratum CO cum quadrato BO, & cum rect=lo COB, vel ut q: CO cum rect=lo CXO ad ſesquialterum rect=li XCO.

Atqui cylindrum AEHD eſt ad cylindrum NEHM ut CO ad OB, ſeu ad OX, vel ut ſesquialterum rect=li XCO ad ſesquialterum rect=li CXO; rurſus igitur ex æquo prædictus defectus conoidis ABD a cylindro AEHD ad cylindrum NEHM eandem habebit proportionem quam quadratum OC cum rect=lo CXO ad ſesquialterum rect=li CXO, ſive quam productum a CB in quadratum CO cum rect=lo CXO (nempe (1) defectus cubi OB

(1) *ex lem. 8.* a cubo CO) ad ſesquialterum producti a CB in rect=lum CXO, ſeu ad ſesquialterum producti ab OX in rectangulum XCB, ſeu in quadratum CD. Quod, &c.

SCHOLIUM I.

Proportio, quam habet ſolidum genitum circa rectam CB a quadrilineo hyperbolico DBOH ad ſolidum ſimiliter progenitum a quadrilineo *dBOb* conſimilis erit rationi, in qua eſt defectus cubi OB a cubo DH ad defectum cubi OB a cubo *db*.

Jam defectus conoidis ABD a cylindro AEHD ad cylindrum NEHM eſt ut defectus cubi OB a cubo OC ad ſesquialterum producti ab OB in quadratum CD; & cylindrum NEHM ad cylindrum *nebm* eſt ut quadratum DC ad quadratum *dc*, vel ut ſesquialterum producti ab OB in quadratum CD ad ſesquialterum producti ab OB in quadratum *dc*, atque cylindrum *nebm* ad defectum conoidis *aBd* a cylindro *aebd* eſt ut ſesquialterum producti ab OB in quadratum *dc* ad defectum cubi OB a cubo O*c*: patet ex æquo proportionem, quam habet defectus conoidis ABD a cylindro AEHD ad defectum

conoi-

Digitized by Google

conoidis aBd a cylindro $aebd$, nempe quam habet ſolidum genitum circa OC a quadrilineo DBbH ad ſolidum ſimiliter progenitum a quadrilineo dBOb, conſimilem eſſe rationi defectus cubi OB a cubo CO, vel a cubo DH ad defectum cubi BO a cubo Oc, vel a cubo db. Quod, &c.

SCHOLIUM II.

Annulus genitus circa rectam CO a quadrilineo hyperbolico DdbH ad annulum ſimiliter factum a rect=lo MHbm ſe habebit ut defectus cubi db a cubo DH ad ſeſquialterum producti ab OB in differentiam quadratorum HO. bO.

Quod facile ex ſupradictis innoteſcit.

SCHOLIUM III.

Proportio quadrilinei hyperbolici DBOH ad rect=lum BOH conſimilis eſt relationi defectus cubi OB a cubo DH ad ſeſquialterum producti a rect=lo BOH in duplam diſtantiam ipſius OB a centro gravitatis ejuſdem quadrilinei DBOH.

Proportio ſolidi geniti circa CO a quadrilineo DBOH ad cylindrum ſimiliter genitum a rect=lo BOHM [1] componitur ex ratione quadrilinei DBOH ad rect=lum BOH, & ex relatione duplæ diſtantiæ ipſius OB a centro gravitatis ejuſdem quadrilinei DBOH ad OH: ac propterea proportio quadrilinei DBOH ad rect=lum BOH compoſita erit ex relatione, quam habet prædictum ſolidum quadrilinei DBOH ad cylindrum rect=li BOH nempe (per hanc prop.) quam habet defectus cubi OB a cubo DH ad ſeſquialterum producti ab OB in quadratum HD, & ex relatione in qua eſt OH ad ſupradictam duplam diſtantiam rectæ OB a centro gravitatis quadrilinei DBOH, vel relatione in qua eſt ſeſquialterum producti ab OB in quadratum OH ad ſeſquialterum producti a rect=lo BOH in præfatam duplam diſtantiam: & per conſequens aſſimilabitur rationi, quam ad hujus producti ſeſquialterum habet defectus cubi OB a cubo DH.

(1) ex ſupp. 2.

Digitized by Google

SCHOLIUM IV.

Simili modo, per præcedens ſecundum ſcholium, reperietur, quod quadrilineum D*db*H ſe habet ad rect=lum M*mb*H ut defectus cubi *db* a cubo DH ad ſesquialterum producti a dupla diſtantia axis OB a centro gravitatis ejusdem quadrilinei D*db*H in duo ſimul rect=la BOH.BO*b*.

THEOREMA XL. Propoſitio 54.

Fig. 145. *Conoidis parabolici* EPH *curva ſuperficies ſe habet ad baſem* EH *ut defectus cubi ſemiparametri* PL *a cubo rectæ lineæ potentis quadratum ejusdem ſemiparametri* PL *cum quadrato ſemidiametri* EO *baſis* EH *ad ſesquialterum producti a ſemiparametro* PL *in quadratum ejuſdem ſemidiametri* EO. *Et Semiparabolæ rectæ* HPO *arcus* HP *ſe habet ad baſim* OH *ut defectus cubi ſemiparametri* PL *a cubo rectæ potentis quadratum ejusdem ſemiparametri* PL *cum quadrato ipſius baſis* OH *ad ſesquialterum producti a diſtantia axis* OP *a centro gravitatis prædicti arcus* HP *in rect=lum ſub baſim* OH, *& ſub parametrum* LL.

In plano alicujus ſectionis EPH per axim OP conoidis (quam ſcimus eſſe parabolam) deſcribatur circa eundem axim POC hyperbola æquilatera ABD, baſi EH conoidis concentrica in O, & cujus latus tranſverſum BX æquetur parabolæ parametro LL, & quæ ſecetur in A, D a rectis EA . HD ordinatis ad ſecundum axim ab extremitatibus baſis EH parabolæ EPH; & per verticalem ordinatam compleatur rect=lum NEHM: atque per rectam ACD compleatur quadrilaterum AEHD, quod erit parallelogrammum rectangulum, ob ordinatas AE . DH æqualiter recedentes a centro O, proindeque inter ſe æquales, & ipſa recta AD ordinata erit ad axim OC.

Hac peracta conſtructione, conſtat ex 6. ſecundi element. quadratum OC poſſe quadratum OB cum rect=lo XCB, ſeu cum quadrato DC, ideoque poſſe quadratum ſemiparametri PL cum quadrato baſis OH ſemiparabolæ HPO.

Et

Et quia parabolicus arcus HP quadrilineo hyperbolico DBOH (1) eſt analogus in gravitate; atque recta OH rectangulo BH eſt quidem analoga in gravitate, & ſe habet (2) idem arcus HP ad rectam OH ut quadrilineum DBOH ad rect=lum BH: curva ſuperficies conoidis EPH genita circa axim CP ab arcu HP ad circulum EH progenitum a ſemidiametro OH ſe habebit (3) ut ſolidum deſcriptum quidem circa CP a quadrilineo DBOH ad cylindrum procreatum a rect=lo BH, & per conſequens (4) ut defectus cubi OB, ſeu PL a cubo rectæ OC potentis quadrata ſimul PL . OH ad ſesquialterum producti a ſemiparametro PL in q: OH quod primo loco, &c.

(1) prop. 39.
(2) cor. 1. prop. 39.
(3) cor. ſup. 1.
(4) ex praeceden. prop.

Denique proportio, quam habet arcus HP ad rectam OH, & quæ conſimilis eſt rationi quadrilinei DBOH ad rect=lum BH, aſſimilabitur quoque rationi (5) in qua eſt defectus cubi OB, ſeu PL a cubo DH, ſeu CO ad ſesquialterum producti a rect=lo BOH, ſeu rect=lo PL×OH in duplam diſtantiam axis PC a centro gravitatis quadrilinei DBOH, nempe arcus HP, vel potius ad ſesquialterum producti ab hac diſtantia, & a rect=lo LL×OH. Quod, &c.

(5) ſchol. 3. prop. 53.

COROLLARIUM.

Hinc profluit, quod ubi dati conoidis EPH axis OP quadranti parametri adæquetur, ipſius conoidis curva ſuperficies ſe habebit ad baſim EH ut defectus cubi ex latere alicujus quadrati, a cubo diametri ad ſesquialterum prioris cubi.

Quandoquidem, in hac hypotheſi, baſis EH radius OE ſemiparametro PL adæquatur.

SCHOLIUM.

Et ab erudito Geometra invenietur, quod cujuslibet conoidis EPH curva ſuperficies ad curvam ſuperficiem cylindri conſtituti in eadem baſe EH altitudineque OP, eandem proportionem habet, quam defectus cubi ex ſemiparametro PL a cubo rectæ potentis quadratum ipſius ſemiparametri PL, quadratumque ſemidiametri EO baſis EH ad ſesquialterum cubi ex hoc ſemidiametro.

THEOREMA XXXXI. Propoſitio 55.

fig. 167. 168. *SI duarum ſemiparabolarum* CBD . cbd *axes* BD . bd *proportionales ſint ſemiparametris* BL . bl.

Curvæ CFB . cfb *inter ſe erunt analogæ in gravitate, atque proportionales erunt tam baſibus* CD . cd, *quam prædictis ſemiparametris* BL . bl.

Atque curvæ ſuperficies conoidium ABC . abc *genitorum ab iiſdem ſemiparabolis* CBD . cbd *inter ſe erunt analogæ in gravitate, & proportionales tam baſibus* AC . ac, *quam quadratis parametrorum* LL . ll *& quam quadratis earundem curvarum parabolicarum* CFB . cfb

Circa axes BDM . *bdm* deſcribantur hyperbolæ æquilateræ MN . *mn*, quæ centra habeant in punctis D . *d*, & quarum ſemitranſverſa latera DM . *dm* æquentur ſemiparametris BL. *bl* parabolarum, ad quarum axes DB . *db* ordinentur rectæ FH. *fh*, ita ut ipſi axes DB . *db* partibus HB . *hb* ſint proportionales, & ab extremitatibus harum ordinatarum, & terminis baſium CD . *cd* ordinentur rectæ FPR . CN, *fpr* . *cn* ad ſecundos axes DC . *dc* hyperbolarum MN . *mn*, & compleantur rect=la MDCT . *mdct*.

Et cum axes DB . *db* proportionentur, ex hypotheſi, ſemiparametris BL . *bl* parabolarum, & conſequenter ſemitranſverſis DM . *dm* hyperbolarum MN . *mn*, & per conſtructionem, proportionales ſint partibus BH . *bh*: quadrata ſemiordinatarum DC . *dc* tam quadratis DM . *dm*, quam quadratis HF . *hf*, ſeu quadratis DP . *dp* proportionabuntur, & idcirco q: DM ad duo ſimul quadrata DM DC, vel (ob hyperbolam æquilateram MN) ad q: CN ſe habebit ut q: *dm* ad duo ſimul qq: *dm* . *dc*, ſive ad q: *cn*: & ſimiliter quadratum DM ad q: PR ut q: *dm* ad q: *pr*: atque rectæ DM . *dm* proportionales erunt ordinatis CN . *cn*, homologiſque ordinatis PR . *pr* quadrilineorum MNCD . *mncd*: unde proportio quadrilinei MNCD ad rect=lum DT (vel ipſi [1] æqualis correlatio parabolici arcus BC ad ordinatam DC) conſimilis erit rationi quadrilinei *mndc* ad rect=lum *dt*; vel

[1] 1 cor. 1. prop. 39.

rationi

rationi parabolici arcus *bc* ad ordinatam *dc*. Et hi arcus parabolici BC . *bc*, qui ordinatis DC . *dc* ſunt proportionales, proportionari debent & ſemiparametris BL . *bl*: ſed ipſis ſemiparametris proportionantur quoque arcus BF . *bf*, etenim axes BH . *bb* proportionales ſunt, per conſtructionem, axibus DB, *db*, & per conſequens, ſemiparametris BL . *bl*; patet igitur arcus CB . *cb* arcubus FB . *fb* eſſe proportionales, & inter ſe eſſe analogos in gravitate, quæ primo loco, &c.

Præterea, cum ſupra oſtenſum ſit, quadrata CD . *cd* quadratis DM . *dm* eſſe proportionalia, cubus MD ad productum ab MD in q: DC ſe habebit ut cubus *md*, ad productum ab *md* in q: *dc*: atqui ob ſupra oſtenſam ſimilitudinem relationum NC . MD; *nc* . *md* proportio defectus cubi DM a cubo CN ad cubum DM conſimilis eſt proportioni in qua eſt defectus cubi *dm* a cubo *cn* ad cubum *dm*: ex æquo igitur proportio defectus cubi DM a cubo CN ad ſeſquialterum producti a DM in q: DC (nempe (1) proportio curvæ ſuperficiei conoidis ABC ad circulum AC) æquabitur proportioni quam habet defectus cubi *dm* a cubo *cn* ad ſeſquialterum producti a *dm* in q: *dc*, vel potius quam habet conoidis *abc* curva ſuperficies ad circulum *ac*. (1) prop. 54.

Eſt autem circulus AC ad circulum *ac* ut quadratum DC ad quadratum *dc*, & per conſequens ut q: ſemiparametri BL ad quadratum ſemiparametri *bl*, & ut quadratum arcus CB ad q: arcus *cb*; patet ergo curvas ſuperficies conoidium ABC . *abc* proportionales eſſe non modo baſibus AC, *ac*, ſed etiam quadratis ſemiparametrorum BL . *bl*, quadratiſque arcum CB . *cb*.

Denique, cum iiſdem quadratis ſemiparametrorum BL . *bl* proportionentur etiam curvæ ſuperficies conoidium EBF . *ebf* (quorum axes HB . *bb* axibus DB . *db*, ideoque ipſis ſemiparametris BL . *bl* ſunt proportionales), neceſſe eſt his curvis ſuperficiebus proportionales eſſe curvas conoidium ABC . *abc*, quæ propterea analogæ ſunt in gravitate. Quod, &c.

N. 2. *THEO-*

BO² ad $ab^2 \times bo + ao \times bo^2$, & permutando, componendo, & iterum permutando efficietur relatio quam habet $AB^3 + AB^2 \times BO + AO \times BO^2$ ad $ab^3 + ab^2 \times bo + ao \times bo^2$: major ratione, in qua eſt $AB^2 \times BO + AO \times BO^2$ ad $ab^2 \times bo + ao \times bo^2$: unde proportio compoſita ex priori harum relationum, & ex ratione AD ad *ad* major quidem erit proportione compoſita ex hac ipſa AD . *ad*, & ex poſteriori illarum, ſcilicet proportio quam habet productum
(1) pr. 52. ab AD in $AB^3 + AB^2 \times BO + OA \times BO^2$ (ſeu (1) $AB^4 - DB^4$) ad productum ab *ad* in $ab^3 + ab^2 \times bo + ao \times bo^2$ (ſeu ad $ab^4 - db^4$) major erit ratione producti ab AD in $AB^2 \times OB + AO \times OB^2$ ad productum ab *ad* in $ab^2 \times ob + ao \times ob^2$ ſeu producti ab AD in $AB^2 + AO \times OB$ ad productum ab *ad* in $ab^2 + ao \times ob$ ſcilicet ratione quam habet $AB^3 - DB^3$ (æquans prius (1) productum) ad $ab^3 - db^3$ æquantem poſterius productum.

Si dati numeri ſint 5. 4. proportio $AB^4 . ab^4$; quæ major eſt tam ratione $AB^3 . ab^3$, ſeu $AB^3 \times OB : ab^3 \times ob$, quam ratione $AO . ao$; ſeu $AO \times BO^3 . ao \times bo^3$, & quam ratione $AB^2 . ab^2$ ſive $AB^2 \times OB^2 . ab^2 \times ob^2$, major eſſe debet etiam ratione quam habet $AB^3 \times OB + AO \times BO^3 + AB^2 \times OB^2$ ad $ab^3 \times ob + ao \times bo^3 + ab^2 \times ob^2$: permutando, componendo, & denuo permutando orietur proportio $AB^4 + AB^3 \times OB + AO \times BO^3 + AB^2 \times OB^2$ ad $ab^4 + ab^3 \times ob + ao \times bo^3 + ab^2 \times bo^2$ major relatione $AB^3 \times OB + AO \times BO^3 + AB^2 \times BO^2$ ad $ab^3 \times ob + ao \times bo^3 + ab^2 \times ob^2$ ſeu relatione $AB^3 + AO \times OB^2 + AB^2 \times BO$ ad $ab^3 + ao \times ob^2 + ab^2 \times bo$: quamobrem proportio compoſita ex relatione AD . *ad*, & ex priori illarum proportionum, major quidem erit proportione compoſita ex poſteriori, & ex ipſa relatione AD . *ad* & per conſequens productum ab AD in $AB^4 + AO \times BO^3 + AB^3 \times OB + AB^2 \times OB^2$ (nempe $AB^5 - DB^5$) ad productum ab *ad* in $ab^4 + ao \times ab^3 + ab^3 \times bo + ab^2 \times ob^2$ (ſeu ad $ab^5 - db^5$), majorem habebit rationem, quam productum ab AD in $AB^3 + AO \times OB^2 + AB^2 \times OB$ (ſeu quam $AB^4 - DB^4$) ad productum ab *ad* in $ab^3 + ao \times ob^2 + ab^2 \times ob$ (ſeu $ab^4 - db^4$).

Simili modo ubi numeri ſint 5. 6. oſtendentur $AB^6 - DB^6$ ad $ab^6 - db^6$ majorem habere relationem quam $AB^5 - DB^5$ ad $ab^5 - db^5$, & ſic in infinitum.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA XLIII. Propoſitio 58.

Dum axis DB *alterius* ABC *ex duobus datis conoidibus ad ſemiparametrum* BL *majorem proportionem habeat quam axis* bd *reliqui conoïdis* abc *ad ſemiparametrum* bl, *curva ſuperficies prioris conoidis* ABC *ad ſuam baſim* AC *majorem relationem habebit, quam curva ſuperficies poſterioris conoidis* abc *ad ſuam baſim* ac. fig. 169. 170.

Ab axe BD abſcindatur ſegmentum HB ſe habens ad BL ut *bd* ad *bl*, & a puncto H ordinato circulo EHF, curva ſuperficies conoidium EBF, *abc* baſibus EF, *ac* proportionabuntur. (1) Deinde ſi recta KD poſſit quadrata AD, BL, ac recta VH poſſit quadrata EH, BL patet KD majorem eſſe, quam VH; ac propterea differentia cuborum KD, BL ad differentiam cuborum VH, BL majorem proportionem (2) habebit, quam differentia quadratorum KD, BL ad differentiam quadratorum VH, BL vel quam quadratum AD ad quadratum EH, ſeu quam ſeſquialterum producti ab LB in q: AD ad ſeſquialterum producti ab LB in q: EH; & permutando efficietur proportio differentiæ cuborum KD, BL ad ſeſquialterum producti ab LB in q: AD, (nempe proportio (3) curvæ ſuperficiei conoidis ABC ad baſim AC) major relatione differentiæ cuborum VH, BL ad ſeſquialterum producti a BL in q: EH, ſeu relatione curvæ ſuperficiei conoidis EBF ad baſim EF, ſive relatione curvæ ſuperficiei conoidis *abc* ad baſim *ac*. Quod, &c.

(1) prop. 55.
(2) lem. IX praeceden.
(3) prop. 54.

LEMMA X. Propoſitio 59.

Datis duabus rectis AB, EB, *tertiam rectam* BD *invenire, quæ minorem* EB *datarum ita excedat, ut differentia cuborum* AB, EB *ad differentiam cuborum* DB, EB *datam habeat relationem* R *ad* S. fig. 171. 172.

Producatur recta AB in *y* ita ut B*y* æquet EB, dimidieturque

B*y*

BO² ad $ab^2 \times bo + ao \times bo^2$, & permutando, componendo, & iterum permutando efficietur relatio quam habet $AB^3 + AB^2 \times BO + AO \times BO^2$ ad $ab^3 + ab^2 \times bo + ao \times bo^2$: major ratione, in qua eſt $AB^2 \times BO + AO \times BO^2$ ad $ab^2 \times bo + ao \times bo^2$: unde proportio compoſita ex priori harum relationum, & ex ratione AD ad ad major quidem erit proportione compoſita ex hac ipſa AD . ad, & ex poſteriori illarum, ſcilicet proportio quam habet productum
(1) Pr. 52. ab AD in $AB^3 + AB^2 \times BO + OA \times BO^2$ (ſeu (1) $AB^4 - DB^4$) ad productum ab ad in $ab^3 + ab^2 \times bo + ao \times bo^2$ (ſeu ad $ab^4 - db^4$.) major erit ratione producti ab AD in $AB^2 \times OB + AO \times OB^2$ ad productum ab ad in $ab^2 \times ob + ao \times ob^2$ ſeu producti ab AD in $AB^2 + AO \times OB$ ad productum ab ad in $ab^2 + ao \times ob$ ſcilicet ratione quam habet $AB^3 - DB^3$ (æquans prius (1) productum) ad $ab^3 - db^3$ æquantem poſterius productum.

Si dati numeri ſint 5. 4. proportio $AB^4 . ab^4$, quæ major eſt tam ratione $AB^3 . ab^3$, ſeu $AB^3 \times OB . ab^3 \times ob$, quam ratione AO . ao, ſeu $AO \times BO^3 . ao \times bo^3$, & quam ratione $AB^2 . ab^2$ ſive $AB^2 \times OB^2 . ab^2 \times ob^2$, major eſſe debet etiam ratione quam habet $AB^3 \times OB + AO \times BO^3 + AB^2 \times OB^2$ ad $ab^3 \times ob + ao \times bo^3 + ab^2 \times ob^2$: permutando, componendo, & denuo permutando oritur proportio $AB^4 + AB^3 \times OB + AO \times BO^3 + AB^2 \times OB^2$ ad $ab^4 + ab^3 \times ob + ao \times bo^3 + ab^2 \times bo^2$ major relatione $AB^3 \times OB + AO \times BO^3 + AB^2 \times BO^2$ ad $ab^3 \times ob + ao \times bo^3 + ab^2 \times ob^2$ ſeu relatione $AB^3 + AO \times OB^2 + AB^2 \times BO$ ad $ab^3 + ao \times ob^2 + ab^2 \times bo$: quamobrem proportio compoſita ex relatione AD . ad, & ex priori illarum proportionum, major quidem erit proportione compoſita ex poſteriori, & ex ipſa relatione AD . ad & per conſequens productum ab AD in $AB^4 + AO \times BO^3 + AB^3 \times OB + AB^2 \times OB^2$ (nempe $AB^5 - DB^5$) ad productum ab ad in $ab^4 + ao \times ab^3 + ab^3 \times bo + ab^2 \times ob^2$ (ſeu ad $ab^5 - db^5$), majorem habebit rationem, quam productum ab AD in $AB^3 + AO \times OB^2 + AB^2 \times OB$ (ſeu quam $AB^4 - DB^4$) ad productum ab ad in $ab^3 + ao \times ob^2 + ab^2 \times ob$ (ſeu $ab^4 - db^4$.)

Simili modo ubi numeri ſint 5. 6. oſtendentur $AB^6 - DB^6$ ad $ab^6 - db^6$ majorem habere relationem quam $AB^5 - DB^5$ ad $ab^5 - db^5$, & ſic in infinitum.

THEO-

THEOREMA XLIII. Propoſitio 58.

D*Um axis* DB *alterius* ABC *ex duobus datis conoidibus ad ſemiparametrum* BL *majorem proportionem habeat quam axis* bd *reliqui conoidis* abc *ad ſemiparametrum* bl, *curva ſuperficies prioris conoidis* ABC *ad ſuam baſim* AC *majorem relationem habebit, quam curva ſuperficies poſterioris conoidis* abc *ad ſuam baſim* ac. *fig. 169. 170.*

Ab axe BD abſcindatur ſegmentum HB ſe habens ad BL ut *bd* ad *bl*, & a puncto H ordinato circulo EHF, curva ſuperficies conoidium EBF . *abc* baſibus EF . *ac* proportionabuntur. (1) Deinde ſi recta KD poſſit quadrata AD . BL, ac recta VH poſſit quadrata EH . BL patet KD majorem eſſe, quam VH; ac propterea differentia cuborum KD . BL ad differentiam cuborum VH . BL majorem proportionem (2) habebit, quam differentia quadratorum KD . BL ad differentiam quadratorum VH . BL vel quam quadratum AD ad quadratum EH, ſeu quam ſeſquialterum producti ab LB in q: AD ad ſeſquialterum producti ab LB in q: EH: & permutando efficietur proportio differentiæ cuborum KD . BL ad ſeſquialterum producti ab LB in q: AD (nempe proportio (3) curvæ ſuperficiei conoidis ABC ad baſim AC) major relatione differentiæ cuborum VH . BL ad ſeſquialterum producti a BL in q: BH, ſeu relatione curvæ ſuperficiei conoidis EBF ad baſim EF, ſive relatione curvæ ſuperficiei conoidis *abc* ad baſim *ac*. Quod, &c. (1) *prop. 55.* (2) *lem. IX praeceden.* (3) *prop. 54.*

LEMMA X. Propoſitio 59.

D*Atis duabus rectis* AB . EB, *tertiam rectam* BD *invenire, quæ minorem* EB *datarum ita excedat, ut differentia cuborum* AB . EB *ad differentiam cuborum* DB . BB *datam habeat relationem* R *ad* S. *fig. 171. 172.*

Producatur recta AB in *y* ita ut B*y* æquet EB, dimidieturque

B*y*

BY in O, & hinc ducatur normalis OF ad BY, potenſque triplum quadrati OB, & circa axim OF deſcribatur parabolica curva HKF, verticem habens in F, & cujus parameter ſit OF: deinde a punctis A . E . B agantur rectæ AH . EM . BN parallelæ ad ipſum axim OF, usque ad curvam HF: datæque rationi R . S æquali facta ratione AH . AI, deſcribatur per punctum I, & intra angulum aſymptoticum AEM, hyperbolica curva IK, a cujus concurſu K cum parabolica agatur KD normalis ad AB.

Dico differentiam cuborum AB . EB ad differentiam cuborum DB . EB eſſe in data ratione R ad S.

A punctis HK ordinentur rectæ HQ . KT ad axim OF parabolæ HMF: & quia quadratum ſemiordinatæ HQ æquatur rect=lo ſub QF in parametrum FO, quadratumque OF æquat rect=lum FOF; ſumma quadratorum HQ . OF, vel quadratorum AO . OF æquabitur rect=lo QOF: ſimiliterque ſumma quadratorum DO . OF reperietur æqualis rect=lo TOF: unde proportio rect=li QOF ad rect=lum TOF, vel proportio QO . TO, ſeu AH . DK conſimilis erit rationi ſummæ quadratorum AO . OF ad ſummam quadratorum DO . OF.

Ulterius cum quadratum FO triplum ſit quadrati OB, per conſtructionem; duo ſimul quadrata FO . BO quadrato BY, aut quadrato BE æquabuntur: ſed rect=lum YAB æquatur quadrato AB cum rect=lo ABY, ſeu ABE; neceſſe eſt igitur quadratum EB, cum quadrato AB & cum rect=lo ABE æquare rect=lum YAB cum quadratis OB . OF, vel æquari duobus ſimul quadratis AO, OF: parique modo quadrata EB . DB una cum rect=lo DBE invenientur æqualia quadratis ſimul DO . OF.

Quapropter quadrata AB . BE cum rect=lo ABE ad quadrata DB . BE cum rect=lo DBE eandem habebunt relationem quam duo ſimul quadrata AO, OF ad duo ſimul quadrata DO . OF, & quam AH ad DK: atque proportio quam habet productum ab AE in quadrata AB . BE cum rect=lo ABE (ſcilicet differentia [1] cuborum AB . BE) ad productum a DE in ſummam quadratorum DB . BE, rectanguli que DBE (nempe ad differentiam cuborum DB . EB) aſſimilabitur rationi rectanguli HAE ad rect=lum KDE, ſeu (ob curvam hyperbolicam IK) ad rect=lum IAE, ſeu rationi AH . AI, vel denique datæ rationi R . S. Quod, &c.

(1) *prop. 51. coroll. 4.*

PRO-

PROBLEMA VII. Propoſitio 60.

AD axim BD *dati conoidis* ABC *circulum ordinare, ut curva ſuperficies, per ipſum abſciſſa ſe habeat ad ipſius conoidis curvam ſuperficiem in data ratione.* fig. 169.

In plano ABC per axim BD dati conoidis, & ad baſis diametrum AC aplicetur rect=lum CKA æquale quadrato ſemiparametri BL; excedenſque figura quadrata AK; & reperiatur (1) talis recta PD ut defectus cubi BL a cubo DP ad defectum cubi BL a cubo KD ſe habeat in data ratione: & ad rectam RP duplam ipſius DP applicetur rect=lum RNP æquale quadrato BL, deficienſque quadrato PN: deinde a puncto N ducatur recta NE parallela ad axim DB, & ab ipſius concurſu E cum parabolica curva ordinetur circulus EHF. Dico ſolutum eſſe problema. (1) prop. 59.

Jam recta KD poteſt quadratum ſemiparametri BL cum quadrato ſemidiametri AD circuli AC, & pariter recta PD poteſt quadratum ſemidiametri EH circuli EF cum quadrato ſemiparametri BL, ut conſtat ex conſtructione; unde curva ſuperficies conoidis EBF ad curvam ſuperficiem conoidis ABC ſe (2) habet ut defectus cubi BL a cubo PD ad defectum cubi BL a cubo KD, videlicet in data ratione. Quod, &c. [2] ex coroll. prop. 56.

LEMMA XI. Propoſitio 61.

DAtam rectam lineam BO *ita producere in* C, *ut defectus cubi* OB *a cubo* OC *ad ſeſquialterum producti ab* OB *in differentiam qq:* OB. OC *datam habeat rationem* ab. bd *majoris inæqualitatis.* fig. 173.

Fiat BX dupla ipſius OB, & *be* ſubſeſquialtera ad *bd*, nempe dupla ad *ed*: fiatque ut *eb* ad *ea* (nempe in proportione minori, quam dupla) ita OX ad rectam DE, ad quam applicando rect=lum DFE æquale rect=lo OX ⨯ DB, excedenſque quadrato EF, ſe habebit OX ad EF ut DF ad ED, deficietque EF ab OX, ſeu ab OB: unde facta ON æquali ad EF, & NC æquali ad ED: dico rectam OB productam eſſe in C ut quæritur.

O Cum,

(1) ex prop. 12. v. Elem. Cum, OX ad EF, ſeu ad ON ſit ut FD ad DE, ſive ut OC ad CN [1] tres rectæ XC . OC . NC erunt continue proportionales, quo poſito, ſi NC non concederetur major quam NB relatio OX . CN (quæ æquat relationem OX . DE minorem quam duplam) non minor eſſet ratione OC . CN, ſeu ratione XC . CO, & ſubſequenter non minor dupla ratione, quod eſt abſurdum: quamobrem recta OB utique producta eſt in C.

Et quia proportio rect=li CXO ad q: CO, quam componunt relatio OX : OC, atque relatio XC . CO, vel CO . CN, conſimilis eſt relationi OX . CN compoſitæ ex iiſdem rationibus vel [ob conſtructionem] rationi OX . DE, ſeu *be . ea*; convertendo, & componendo erit q: CO cum rect=lo CXO ad rect=lum OXC, ſive productum a CB in q: CO cum rect=lo CXO ad productum a OB in rect=lum CXO, ſcilicet (2) defectus cubi OB a cubo CO ad productum ab OX, ſeu OB in rect=lum XCB, ideſt in differentiam qq: CO . BO ut *ab* ad *be*: ac denique idem defectus cubi OB a cubo CO ad ſeſquialterum producti ab OB in differentiam qq: CO . BO ſe habebit in data ratione *ab . bd*. Quod, &c.

[2] cor. 4. prop. 51.

SCHOLIUM

Hic animadvertere non erit inutile, quod ubi data recta OB ita ſit protracta in C, ut defectus cubi OB a cubo CO ſe habeat ad productum ab OB in differentiam qq: OB . OC in prop= ne *ab . be*, quæ ſit tripla; quadratum ex differentia CB rectarum BO . CO triplum erit quadrati ipſius rectæ BO.

Nam ubi relatio *ab . be* ſit tripla; relatio *be . ea*, vel huic æqualis (per conſtructionem) XO . ED erit ſubdupla; rect=lumque DFE (quod per conſtructionem æquat rect=lum OX × DE) duplum erit q: OX, ſeu q: OB: at dimidiata ED in V, quadratum VE æquat q: OX, ſeu q: OB; rect=lum igitur DFE cum q: EV, nempe unicum q: VF, triplum erit ejuſdem q: OB, & ob paritatem tam rectarum CO . DF, quam rectarum DV . OB, neceſſe eſt, CB æquare VF, quadratumque CB quadrato VF, ideſt triplo q: OB æquiparari, &c.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA VIII. Propoſitio 62.

AD axim OZ dati conoidis parabolici ADM *indefinite longi ordinare circulum, ita ut curva ſuperficies ab ipſo abſciſſa ſe habeat ad idem circulum in data ratione* ab . bd *majoris inæqualitatis.* fig. 173.

Abſcindatur ab axe OZ pars OB ſemiparametro æqualis, quæ (per præcedens lemma) producatur ita in C, ut defectus cubi OB a cubo CO ad ſeſquialterum producti ab OB in differentiam quadratorum CO . BO datam habeat rationem *ab . bd*: poſtea ut integra parameter ad CB ita fiat CO + OB ad OH, & per punctum H ordinetur circulus KM ad axim OZ. Dico curvam ſuperficiem conoidis KOM eſſe ad circulum KM in data ratione *ab . bd*.

Cum parameter ad CB ſe habeat, per conſtructionem, ut CO + OB ad OH, rectangulum ſub HO in parametrum, nempe quadratum HM æquabitur rectangulo ſub CB in CO + BO, ſeu differentiæ quadratorum BO . CO: unde recta CO poterit quadratum ſemiparametri OB cum quadrato ſemidiametri HM circuli KM, atque curva ſuperficies conoidis KOM ſe habebit (1) ad circulum KM, ut defectus cubi OB a cubo OC ad ſeſquialterum producti a ſemiparametro BO in quadratum HM, ſeu in differentiam quadratorum CO . BO, videlicet in data ratione *ab . bd*. Quod, &c. (1) prop. 54.

SCHOLIUM

Notandum eſt, quod in conoide parabolico KOM, cujus curva ſuperficies tripla ſit baſis KM, axis HO quarto loco proportionalis eſt poſt parametrum BX, poſt rectam CB, quæ poteſt ſubſeſquialterum quadrati ex ipſo parametro BX, & poſt rectam CX compoſitam ex ipſa BC, & ex ipſa parametro BX.

Cum defectus cubi OB a cubo OC ad ſeſquialterum producti a ſemiparametro BO in differentiam quadratorum CO . BO ſit ut curva ſuperficies conoidis KOM ad baſim KM, ſcilicet, in hoc caſu in proportione tripla; idem defectus cubi OB a cu-

bo OC triplus erit producti ab OB in differentiam quadratorum CO . BO, ac quadratum CB triplum erit, (per ſchol: præcedentis propoſitionis) quadrati OB, proindeque ſubſeſquitertium quadrati BX. Et quia quadratum HM (ut ſupra vidimus) æquat differentiam quadratorum CO . BO, & ob parabolam, æquat etiam rect=lum ſub HO in parametrum BX; hoc rect=lum æquabitur differentiæ quadratorum CO . BO, ſeu rect=lo XCB, ac propterea ut BX ad BC ita ſe habebit CX ad OH. Quod, &c.

PROBLEMA IX. Propoſitio 63.

fig. 174. 175. *Datâ rectâ terminata* BO, *deſcribere conoides parabolicum, axim habens in ipſa recta* BO, *& cujus focus ſit in altera extremitate* O, *baſiſque centrum in reliqua extremitate* B, *& cujus curva ſuperficies ſe habeat ad baſim in data ratione* R . S *majoris inæqualitatis.*

(1) prop. 61. Sit aliqua recta AH, & ita producatur (1) ad punctum K ut defectus cubi AH a cubo KH ſe habeat ad ſeſquialterum producti ab AH in differentiam quadratorum AH . KH in data ratione R . S: & inventa media proportionali PH inter AK, & inter AH + KH [quæ poterit differentiam quadratorum AH . KH] reperiatur tertia proportionalis TH poſt 2 AH, & poſt PH: deinde ut TH ad AH ita fiat BF ad 2 FO, & circa axim BF, & cum parametro quadruplo rectæ OF deſcribatur conoides parabolicum DFE, verticem habens in F: dico ſolutum eſſe Problema.

Jam conoidis focus eſt in puncto O (quandoquidem diſtantia OF ſubquadrupla eſt parametri) baſiſque DE centrum eſt in puncto B.

Præterea eſto IB dupla ad FO, nempe ſubdupla parametri, ac recta CB poſſit quadrata ſimul DB . IB, quatenus quadratum DB æquetur differentiæ quadratorum CB . IB. Et quia ob parabolam DFE, quadratum DB duplum eſt rect=li FBI, & quadratum PH, per conſtructionem, duplum eſt rect=li THA, & amplius FB ad 2 OF ſeu IB, eſt ut TH ad AH, innoteſcet, quadratum DB, nempe differentiam quadratorum CB . IB eſſe ad q. IB ut quadratum PH, ſeu differentiam quadratorum KH.

AH

AH ad q. AH : innoteſcet, inquam, proportionem differentiæ cuborum KB . IB ad ſeſquialterum producti ab IB in differentiam quadratorum OB . BI, vel in q. DB (ſcilicet (1) proportionem curvæ ſuperficiei conoidis DFE ad baſim DB) conſimilem eſſe rationi, in qua eſt differentia cuborum KH . AH ad ſeſquialterum producti ab AH in differentiam quadratorum KH . AH, videlicet datæ rationi R . S. Quod, &c. (1) prop. 54.

SCHOLIUM.

Conſimili vel ſaltem parum diverſa conſtructione deſcribetur cum dato axe conoides parabolicum, cujus curva ſuperficies ſe habeat ad baſim in data ratione majoris diſparitatis.

PROBLEMA X. Propoſitio 64.

Supra datum circulum DE *deſcribere conoides parabolicum, cuius curva ſuperficies ſe habeat ad ipſum circulum* DE *in data ratione* R . S. *majoris inæqualitatis.* fig. 174.

Semidiameter BD circuli DE (2) producatur ita in N ut defectus cubi BD a cubo BN ad ſeſquialterum producti a DB in differentiam quadratorum DB . NB ſit in data ratione R . S : & ut dupla BD ad mediam proportionalem (puta VB) inter DN, & inter NB + DB ita fiat BD ad rectam BF [quæ normalis ſit ex centro B ad circulum DE], & circa axim BF, & ordinatam DE deſcribatur parabola DFE: (2) prop. 61.

Dico quod curva ſuperficies conoidis geniti ab hac parabola ſe habebit ad circulum DE in data ratione R . S.

Si ut dupla DB ad BV, ſcilicet ut BD ad BF ita fiat duplum rectæ BI, ad DB, ipſa recta BI ſemiparameter erit parabolæ DFE.

Applicetur ad rectam ED rectangulum ECD æquale quadrato IB, excedenſque quadrato CD; quatenus recta CB poſſit quadrata ſimul DB : IB: & quia per conſtructionem, ut VB ad 2 DB ita eſt BF ad BD, ſeu BD ad 2 BI, erit VB ad DB ut DB ad BI, & quadratum BV ad q. DB, ut quadratum DB ad q. BI, &

compo-

bo oc triplus erit producti ab ob in differentiam quadratorum co . bo, ac quadratum ob triplum erit, (per ſchol: præcedentis propoſitionis) quadrati ob, proindeque ſubſeſquitertium quadrati bx. Et quia quadratum hm (ut ſupra vidimus) æquat differentiam quadratorum co . bo, & ob parabolam, æquat etiam rect=lum ſub ho in parametrum bx; hoc rect=lum æquabitur differentiæ quadratorum co . bo, ſeu rect=lo xcb, & propterea ut bx ad bc ita ſe habebit cx ad oh. Quod, &c.

PROBLEMA IX. Propoſitio 63.

fig. 174. 175. *Data recta terminata* bo, *deſcribere conoides parabolicum, axim habens in ipſa recta* bo, *& cujus focus ſit in altera extremitate* o, *baſisque centrum in reliqua extremitate* b, *& cujus curva ſuperficies ſe habeat ad baſim in data ratione* r . s *majoris inæqualitatis.*

(1) prop. 61. Sit aliqua recta ah, & ita producatur (1) ad punctum k ut defectus cubi ah a cubo kh ſe habeat ad ſeſquialterum producti ab ah in differentiam quadratorum ah . kh in data ratione r . s: & inventa media proportionali ph inter ak, & inter ah + kh [quæ poterit differentiam quadratorum ah . kh] repetiatur tertia proportionalis th poſt 2 ah, & poſt ph: deinde ut th ad ah ita fiat bf ad 2 fo, & circa axim bf, & cum parametro quadruplo rectæ of deſcribatur conoides parabolicum dfe, verticem habens in f: dico ſolutum eſſe Problema.

Jam conoidis focus eſt in puncto o (quandoquidem diſtantia of ſubquadrupla eſt parametri) baſisque de centrum eſt in puncto b.

Præterea eſto ib dupla ad fo, nempe ſubdupla parametri, ac recta cb poſſit quadrata ſimul db . ib, quatenus quadratum db æquetur differentiæ quadratorum cb . ib. Et quia ob parabolam dfe, quadratum db duplum eſt rect=li fbi, & quadratum ph, per conſtructionem, duplum eſt rect=li tha, & amplius fb ad 2 of, ſeu ib, eſt ut th ad ah, innoteſcet, quadratum db, nempe differentiam quadratorum cb . ib eſſe ad q. fb ut quadratum ph, ſeu differentiam quadratorum kh.

KH ad q. AH innoteſcet, inquam, proportionem differentiæ cuborum KB . IB ad ſeſquialterum producti ab IB in differentiam quadratorum OB . BI, vel in q. DB (ſcilicet (1) proportionem curvæ ſuperficiei conoidis DFE ad baſim DB) conſimilem eſſe rationi, in qua eſt differentia cuborum KH . AH ad ſeſquialterum producti ab AH in differentiam quadratorum KH . AH, videlicet datæ rationi R . S. Quod, &c. (1) prop. 54.

SCHOLIUM.

Conſimili vel ſaltem parum diverſa conſtructione deſcribetur cum dato axe conoides parabolicum, cujus curva ſuperficies ſe habeat ad baſim in data ratione majoris diſparitatis.

PROBLEMA X. Propoſitio 64.

Supra datum circulum DE *deſcribere conoides parabolicum, cuius curva ſuperficies ſe habeat ad ipſum circulum* DE *in data ratione* R . S. *majoris inæqualitatis.* fig. 174.

Semidiameter BD circuli DE (2) producatur ita in N ut defectus cubi BD a cubo BN ad ſeſquialterum producti a DB in differentiam quadratorum DB . NB ſit in data ratione R . S: & ut dupla BD ad mediam proportionalem (puta VB) inter DN, & inter NB + DB ita fiat BD ad rectam BF [quæ normalis ſit ex centro B ad circulum DE], & circa axim BF, & ordinatam DE deſcribatur parabola DFE: (2) prop. 61.

Dico quod curva ſuperficies conoidis geniti ab hac parabola ſe habebit ad circulum DE in data ratione R . S.

Si ut dupla DB ad BV, ſcilicet ut BD ad BF ita fiat duplum rectæ BI, ad DB, ipſa recta BI ſemiparameter erit parabolæ DFE.

Applicetur ad rectam ED rect-lum ECD æquale quadrato IB, excedenſque quadrato CD; quatenus recta CB poſſit quadrata ſimul DB : IB: & quia per conſtructionem, ut VB ad 2 DB ita eſt BF ad BD, ſeu BD ad 2 BI, erit VB ad DB ut DB ad BI, & quadratum BV ad q. DB, ut quadratum DB ad q. BI, &

compo-

componendo, erit ſumma quadratorum DB NB nempe unicum q: NB (ob VB medium proportionalem inter DN & inter NB + DB) ad q: DB ut ſumma quadratorum DB . IB, ſive unicum q: CB ad q: BI; atque cubus NB ad cubum DB ut cubus CB ad cubum BI: defectuſque cubi IB a cubo CB ad cubum BI ut defectus cubi DB a cubo NB ad cubum DB.

Atqui ob ſimilitudinem relationis quadrati IB ad q: DB relationiſque quadrati DB ad quadratum BV, cubus IB ad ſesquialterum producti ab IB in q: DB [id eſt in differentiam quadratorum CB . IB] eſt ut cubus DB ad ſeſquialterum producti a DB in q: BV:

Ex æquo igitur proportio defectus cubi BI a cubo CB ad ſeſquialterum producti ab IB in differentiam quadratorum CB . BI videlicet proportio (1) curvæ ſuperficiei conoidis DFE ad baſim DE, conſimilis erit rationi defectus cubi DB a cubo BN ad ſeſquialterum producti a DB in q: BV, ſeu in differentiam quadratorum NB . DB, ſcilicet datæ rationi R : S. Quod, &c.

(1) prop. 54.

LEMMA XII. Propoſitio 65.

fig. 176.

Differentiam cuborum duarum rectarum inæqualium OC . OB ſe habet in proportione deficiente, majorique quam ſubſeſquialtera ad ſeſquialterum producti a majori OC in differentiam quadratorum ipſarum rectarum:

Si fiat OX æqualis OB, defectus cubi XO a cubo OC æquabitur (2) producto a differentia CB rectarum OB . OC in quadratum OC cum rect=lo CXO, ſive in quadratum OX cum rect=lo XCO. Inſuper productum ab OC in differentiam quadratorum CO . BO, ſeu in rect=lum XCB idem erit cum producto a CB in rect=lum XCO: quamobrem defectus cubi OB a cubo OC ad productum a CO in differentiam quadratorum OC . OB ſe habebit ut productum a CB in q: OX cum rect=lo XCO ad productum a CB in rect=lum XCO, ſcilicet ut q: OX cum rect=lo XCO ad rect=lum XCO, & per conſequens in proportione majoris ad minus: idemque defectus cubi OB a cubo OC ſe habebit ad ſeſquialterum producti a CO in differentiam quadratorum BO . CO in proportione majori quam ſubſeſquialtera. Præterea quadratum XO de-

(2) cor. 4. prop. 51.

deficit a dimidio rectanguli XCO: & addito communiter rect=lo XCO, quadratum XO cum rect=lo XCO deficiet a ſesquialtero rectanguli XCO: productumque a CB in q: XO cum rect=lo XCO (ſcilicet differentia cuborum OB . OC) deficiet a ſesquialtero producti a CB in rect=lum XCO, ſeu producti a CO in rect=lum XCB, aut in differentiam quadratorum CO . BO.

THEOREMA XXXXIV. Propoſitio 66.

Conoidis parabolici ABC *curva ſuperficies ad curvam ſuperficiem coni* AND *in eadem baſe* AC *circumſcripti, ſe habet in proportione majori quam ſubſesquialtera, ſed equante relationem, quam habet defectus cubi ex ſemiparametro a cubo rectæ potentis quadratum ejuſdem ſemiparametri, cum quadrato radii baſis communis ad ſesquialterum producti ab hujus radii quadrato in predictam rectam.* fig. 177.

Dummodo præfatæ ſuperficies ſe mutuo contingant in communis baſis peripheria.

Secantur ſolida ABD, ANC aliquo plano per axim ND efficientur parabola ABC, triangulumque ANC, cujus latera AN, CN ipſam parabolam contingent in extremitatibus baſis AC; a quarum altera A ducatur recta AE normalis ad tangentem AN, & per conſequens ad curvam AB: & quia ex conicis elementis, ſubnormalis DE ſemiparametro æquatur, normalis AE quæ poteſt dum ſimul quadrata AD . ED, poterit quadratum ſemiparametri DE cum quadrato AD.

Quamobrem curva ſuperficies conoidis ABC ad circulum AC eandem proportionem (1) habebit, quam defectus cubi DE a cubo AE ad ſesquialterum producti ab ED in quadratum AD: [1] prop. 54.
eſt autem circulus AC ad curvam ſuperficiem coni ANC (2) ut AD ad AN, ſive [ob triangulorum ADN, EDA ſimilitudinem] ut DE ad EA, vel ut ſesquialterum producti ab ED in quadratum AD ad ſesquialterum producti ab AE in quadratum AD, ex æquo igitur curva ſuperficies conoidis ABC ad curvam ſuperficiem coni ANC ſe habebit ut defectus cubi ex ſemiparametro DE a cubo rectæ AE potentis quadrata AD . DE ad ſesquialterum producti ab AE in quadratum AD, ſeu in differentiam quadratorum (2) Archim. de ſph. & cyl. lib. 1. prop. 17.

Digitized by Google

totum AE . ED; & ſubſequenter in proportione majori quam ſubſeſquialtera, per præcedens lemma: Quod, &c.

LEMMA XIII. Propoſitio 67.

fig. 176. *Datam rectam lineam* OB *ita producere in* C *ut defectus cubi* OB *a cubo* OC *ad ſeſquialterum producti ab* OC *in differentiam quadratorum* CO . BO *ſe habeat in data ratione deficiente* ab . bd; *& majori, quam ſubſeſquialtera.*

Fiat XB dupla datæ rectæ OB, & *eb* ſubſeſquialtera ad *bd*, proindeque dupla ad *ed*, & plus quam dupla ad *ae*: & ut *ae* ad *eb* ita quadratum XO ad quadratum *y*: & ad rectam XO applicetur rect=lum XCO æquali quadrato *y*, at excedens quadrato OC.

Dico rectam OB productam eſſe ad punctum C juxta quæſitum.

Quadratum XO ad rect=lum XCO eandem proportionem habet, quam ad quadratum *y* ipſi rectangulo æquale per conſtrutionem, ſeu quam *ae* ad *eb*: ac propterea minorem proportionem habet, quam duplam, ſeu quam quadrati OX ad rect=lum XBO: & ideo rect=lum XCO majus eſt rect=lo XBO ac recta OB producta erit in C.

Rurſus cum quadratum XO ad rect=lum XCO ſe habeat ut *ae* ad *eb*, componendo efficietur proportio quadrati XO cum rect=lo XCO ad rect=lum XCO, vel quadrati OC cum rect=lo CXO ad rect=lum XCO conſimilis rationi *ab* . *be*: eſt autem rect=lum XCO ad ſeſquialterum ejuſdem rect=li XCO ut *eb* ad *bd*; ex æquo igitur proportio quam habet quadratum CO cum rect=lo CXO ad ſeſquialterum rect=li XCO; ſeu quam habet productum a CB in quadratum CO cum rect=lo CXO (nempe [1] differentia cuborum OB . OC) ad ſeſquialterum producti a CB in rect=lum XCO, vel producti a CO in rect=lum XCB ſeu in differentiam quadratorum OB . OC, conſimilis erit rationi *ab* . *bd*, ſcilicet datæ rationi: Quod, &c.

[1] prop. 51. coroll. 4.

PRO-

PROBLEMA XI. *Propoſitio* 68.

AD axim BZ *dati conoidis parabolici infinite longi* FBI *ordinare circulum, ita ut curva ſuperficies conoidis abſciſſi per eundem circulum, ad curvam ſuperficiem coni circumſcripti in eadem baſe, ſe habeat in data ratione deficiente* R.S, *& quæ major ſit quam ſubſeſquialtera.* fig. 177.

Conoidis ſemiparameter BH producatur, per præcedens lemma, ita in V, ut differentia cuborum BH . BV ad ſeſquialterum producti a BV in differentiam quadratorum BH . BV ſit in data ratione R . S: capiaturque recta BT potens differentiam quadratorum BH . BV, & ab axe BZ abſcindatur ſegmentum BD tertio loco proportionale poſt duplam BH & poſt BT: & per punctum D ordinetur circulus ADC: dico curvam ſuperficiem abſciſſi conoidis ABC eſſe ad curvam ſuperficiem circumſcripti coni ANC in data ratione R . S.

Quadratum AD, ob conoides, æquatur rect=lo ſub DB in parametrum, nempe, in duplam BH, ideoque æquatur quadrato BT æquanti ipſum rect=lum ex conſtructione: recta igitur BV poterit quadratum ſemiparametri BH cum quadrato radii AD circuli ADC; atque curva ſuperficies conoidis ABC ad curvam ſuperficiem coni ANC ſe habebit(1) ut differentia cuborum BH . BV ad ſeſquialterum producti ab VB in q: AD, ſeu in differentiam qq. HB . VB, ſcilicet in data ratione R.S. Quod, &c. (1) *prop.* 66.

SCHOLIUM.

Ope ejuſdem præcedentis lemmatis ſupra datum circulum, aut cum dato axe, deſcribetur conoides parabolicum, cujus curva ſuperficies ſe habeat ad curvam ſuperficiem coni circumſcripti in data ratione deficiente, majori autem, quam ſubſeſquialtera.

Digitized by Google

THEOREMA XXXXVIII. Propoſitio 69.

fig. 177. 178 179. 180. & 181. *Conoidis parabolici* ABC *curva ſuperficies ſe habet ad curvam ſuperficiem ſphæræ* EFHMN, *aut ſphericæ portionis* EFHMN *ut defectus cubi ex ſemiparametro* DO *a cubo rectæ potentis quadratum ejuſdem ſemiparametri* OD *cum quadii* AD *baſis* AC *ad triplum producti ab ipſa ſemiparametro* DO *in rect=lum ex axe* IH *ſphæræ, aut portionis ſphæricæ* EFHMN *& ex ſemiaxe* HP *integræ ſphæra.*

(1) prop. 54. Curva ſuperficies conidis ABC eſt (1) ad baſim AC ut defectus cubi DO a cubo rectæ potentis quadrata AD.DO ad ſeſquialterum producti a q: DA in OD: ſed juncta recta EH, circulus AC ad curvam ſuperficiem ſphæræ, aut ſphæricæ portionis EFHMN eſt (2) ut quadratum AD ad q: HE, vel ad duplum rect=li PHI, vel ut ſeſquialterum ad ſeſquialterum, ſcilicet ut ſeſquialterum q: AD ad triplum rect=li PHI, vel ut ſeſquialteTum producti ab OD in q: AD ad triplum producti ab OD in rect=lum PHI; ex æquo igitur patet propoſitum, &c.

(2) ex Archim. de ſphæra & cylindro lib. 1 prop. 50.

COROLLARIUM.

Hinc infertur, quod curva ſuperficies conoidis ABC ſe habet ad ſphæræ ſuperficiem, ut defectus cubi OD a cubo rectæ potentis qq: OD.AD ad ſextuplum producti a prædicta ſemiparametro OD in quad: ſemiaxis ejuſdem ſphæræ: & ſe habet ad curvam ſuperficiem hemiſphærii ut prædictus defectus ad triplum producti ab OD in quadratum axis ipſius hemiſphærii.

LEMMA XIV. Propoſitio 70.

fig. 182. *Datam rectam lineam* OB *ita producere in* C *ut aggregatum ex quadratis* CO.BO, *ac rectanguli* COB *ad triplum ejuſdem rect=li* COB *datam habeat rationem excedentem* ab . bc.

Ab-

Digitized by Google

Abſcindendo a conſequente termino bc datæ relationis $ab.bc$ tertiam partem bd, relatio $ab.bd$ major erit quam tripla, relatioque $ad.db$ major, quam quadrupla; ſi fiat igitur OX æqualis ad OB, & EX ad OX ut ad ad db erit EX plus quam quadrupla ipſius OX, & pluſquam dupla XB, quadratumque EX plus quam quadruplum rect=li EXO: quo poſito, applicetur ad rectam EX rect=lum ECX æquale rect=lo EXO, deficiensque quadrato EC. Dico rectam OB productam eſſe in C ut requiritur.

Jam ob rectangulum ECX æquale rect=lo EXO, ſcilicet minus, quam ſubquadruplum quadrati EX, non eſt dubitandum, EC minorem eſſe, quam ſubdupla ad EX, minoremque, quam EB, ac propterea recta BO productam eſſe in C.

Rurſus ob paritatem rect=lorum ECX.EXO; eſt EX ad EC ut OX ad OC; & per converſionem rationis EX ad CX ut CX ad CO. Et quia proportio quadrati CX ad rect=lum COX componitur ex ratione CX.XO, & ex ratione CX.CO ſeu EX.CX; patet ipſam proportionem quadrati CX ad rect=lum COX conſimilem eſſe correlationi EX.XO, compoſitæ ex iiſdem rationibus EX.CX; CX.XO, ac propterea conſimilem rationi $ad.db$; ex conſtructione; & dividendo ſe habebit quadratum CO cum rect=lo CXO ad rect=lum COX, ſeu COB ut ab ad bd: & triplicando terminos conſequentes efficietur proportio quadrati CO cum rect=lo CXO, ideſt aggregatum quadratorum CO.BO, ac rect=li COB ad triplum rect=li COB, ut ab ad bc. Quod, &c.

PROBLEMA XII. Propoſitio 71.

AD axim BF *dati conoidis* IBC *infinite longi ordinare circulum* ADC *ita ut curva ſuperficies abſciſſi conoidis* ABC *ad curvam ſuperficiem ſphæricæ portionis inſcriptæ cum eadem baſe* AC *ſe habeat in data proportione excedente* R. S. *fig.* 183.

Semiparameter BH parabolæ IBC per axim BF conoidis producatur ita in N (1) ut aggregatum quadratorum BH.BN, rectangulique NBH ſe habeat ad hujus rect=li triplum in data ratione R.S: & inventa recta BP potente differentiam quadra- (1) *prop.* 70.

torum NB . HB, abſcindatur ab axe BF pars BD tertio loco proportionalis poſt integram parametrum & poſt rectam BP, & a puncto D ordinetur circulus ADC: dico actum eſſe quod oportebat.

Si a puncto A ducatur normalis AO ad curvam IAB, ipſius ſubnormalis DO æquabitur ſemiparametro BH, & ſemiordinata AD, quæ poteſt rect=lum ſub DB in parametrum, æquabitur rectæ BP potenti idem rect=lum ex conſtructione: atque recta AO potens quadrata OD. AD, ſeu BH. BP æquabitur rectæ NB potenti eadem quadrata BH . BP ex conſtructione.

Inſuper ſi centro O, & intervallo OA deſcribatur circulus AECF, ipſius peripheria tranſibit per C, & parabolicam curvam continget in punctis A. C: & per conſequens curva ſuperficies ſphæræ genitæ ab ipſo circulo continget curvam conoidis ABC in circumferentia circuli AC. Conoidisque ABC curva ſu-

[1] *prop.* 69. perficies ad curvam ſuperficiem ſphæricæ portionis AEC ſe (1) habebit ut defectus cubi OD a cubo rectæ AO, vel EO potentis qq: AD. OD, vel ut huic defectui æquale productum ab

(2) *prop.* 51. *coroll.* 4. ED (2) in aggregatum ex qq: EO. DO, rect=loque EOD, ad triplum productis ab OD in rect=lum OED, ſcilicet ſe habebit ut aggregatum quadratorum EO. OD, ac rect=li EOD, ad triplum hujus rect=li EOD ſive ut aggregatum quadratorum NB. BH, rect=lique NBH ad hujus rect=li NBH triplum, ſcilicet in data ratione R. S. Quod, &c.

SCHOLIUM I.

Ad axem EF datæ ſphæræ AECF ordinari poteſt circulus ADC inæqualiter dividens ipſam ſphæram, ita ut curva ſuperficies conoidis parabolici circumſcribentis minorem ſphæræ portionem cum eadem baſe, ſe habeat ad ipſius portionis curvam ſuperficiem in data ratione excedente R. S.

(3) *prop.* 70. Producto ſemiaxe OE ita (3) in V ut aggregatum ex quadratis VO EO, ac rect=li VOE ad triplum hujus rect=li ſit in ratione R. S; & inventa tertia proportionali OD poſt duas VO. EO, quatenus ſumma quadratorum EO. DO, rect=lique EOD ſe habeat ad triplum hujus rect=li, ut aggregatum ex quadratis

VO.

VO.EO, ac rect=li VOE ad triplum hujus rect=li, ſcilicet ut R ad S: ordinetur per punctum D circulus AC: & ſic ſolutum erit quæſitum.

SCHOLIUM II.

Ope ejuſdem lemmatis XIV. ſupra datum circulum deſcribitur conoides parabolicum, cujus curva ſuperficies ad curvam ſuperficiem ſphæricæ portionis inſcriptæ cum eadem baſe, datam habeat rationem excedentem R . S.

Et cum dato axe deſcribitur parabolicum conoides, cujus curva ſuperficies ad curvam ſuperficiem ſphæricæ portionis inſcriptæ cum eadem baſe ſit in data ratione excedente R . S.

Et cum dato axe deſcribitur ſphærica portio, ad cujus curvam ſuperficiem ſe habeat in data ratione excedente curva ſuperficies *conoidis parabolici* circumſcripti cum eadem baſe.

SCHOLIUM III.

Et ne lectoris patientia nimium abutar, aliorum Problematum hujus generis derelinquo ſolutiones; videlicet a dato conoide parabolico infinite longo portionem rectam abſcindere, cujus curva ſuperficies dato circulo adæquetur.

Cum dato axe terminato conoides parabolicum deſcribere, cujus curva ſuperficies dato circulo ſit æqualis.

Datæ ſphæræ, aut dato hemiſphærio circumſcribere conoides parabolicum, cujus curva ſuperficies deficiat a curva ſuperficie cujuslibet alii conoidis parabolici pariter circumſcripti.

Vel cujus curva ſuperficies ſe habeat ad curvam ſuperficiem prædictæ ſphæræ aut hemiſphærii in data poſſibili relatione, &c.

Digitized by Google

THEOREMA IL. Propoſitio 7.

fig. 184. AXis BD conoidis parabolici ABC ad aggregatum ex decima parte parametri IL; & ex diſtantia verticis B a centro gravitatis (puta Q) curvæ ſuperficiei ejuſdem conoidis eandem proportionem habet, quam defectus cubi ex ſemiparametro BL a cubo rectæ potentis q: ejuſdem ſemiparametri BL quadratumque ex ſemidiametro AD baſis AC ad tres quintas partes hujus cubi.

Producatur axis BD erga verticem B in O, & V ita ut BV æquet $\frac{1}{4}$, & BO æquet $\frac{1}{10}$ parametri IL, & per conſequens OV æquet $\frac{3}{20}$ parametri IL, ideſt $\frac{3}{5}$ quadrantis BV ejuſdem parametri: deinde ab VD abſcindatur pars DP æquans $\frac{2}{5}$ ejuſdem DV; quatenus relationi BV . VO adæquetur relatio DV . VP; & ſubſequenter (1) etiam relatio DB . OP: producaturque OP ita in Q, ut OQ ad QP eandem prop=nem habeat, quam cubus rectæ potentis q: AD cum q: ſemiparametri BL ad cubum ſemiparametri BL proindeque OP ad OQ ut eorumdem cuborum differentia ad priorem cubum.

(1) lib. V. elemen. prop. 19.

Poſtmodum ad axim DV ſe referat ſemiparabola ENVD, verticem habens in V, communemque parametrum IL cum parabola ABC, cujus ordinata IB per B æquabit ſemiparametrum: & tam differentia qq: ED . AD, quam differentia qq: NH . FH (quæcumque ſit ordinata NFH) æquabitur q: LB (2) ac proptetea recta ED poterit qq: AD . BL, pariterque recta NH poterit qq: FH . BL: quare curva ſuperficies conoidis ABC ad curvam ſuperficiem portionis FBK abciſſæ per circulum ordinatum FK ſe habebit (3) ut defectus cubi LB a cubo ED ad defectum cubi LB a cubo NH, ſcilicet ut quadrilineum parabolicum EIBD ad quadrilineum NIBH, & eidem quadrilineo EIBD erit analoga in gravitate ipſa ſuperficies conoidis ABC.

[2] Vinc. Vivian. de max. & min.

(3) per cor. prop. 56.

Et quia tam BV ad VO, quam DV ad VP eſt, ex conſtructione ut 5. ad 3. puncta O, P in axe VD erunt (4) centra æquilibrii ſemiparabolarum IVB . EVD; atqui OQ ad QP eſt ex conſtructione ut cubus DB ad cubum IB, vel ut ſemiparabola EVD ad ſemiparabolam IVB; punctum igitur Q, in eodem axe erit

[4] ex Arch. lib. 2. de æquic pond. pr. 8.

Digitized by Google

erit [1] centrum æquilibrii parabolici quadrilinei EIBD, & per conſequens erit centrum gravitatis curvæ ſuperficiei conoidis ABC. [1] *ex mechan.*

Denique cum DB ad PO, ut ſupra oſtenſum eſt, ſe habet ut 5. ad 3., vel ut 1. ad $\frac{3}{5}$, ſcilicet ut cubus ED ad $\frac{3}{5}$ ejuſdem cubi: & OP ad OQ (ut ſupra indicavimus) ſe habet ut differentia cuborum ED . IB ad cubum ED: ex æquo igitur perturbate axis BD ad aggregatum QO ex diſtantia QB, & ex decima parte BO parametri IL erit ut defectus cubi IB a cubo rectæ ED potentis qq: AD . LB ad $\frac{3}{5}$ hujus cubi. Quod, &c.

SCHOLIUM.

Similiter reperietur, quod fruſtri conoidalis AFKC axis DH eſt ad aggregatum ex diſtantia minoris baſis FK a centro gravitatis curvæ ſuperficiei ejuſdem fruſtri, & ex $\frac{2}{5}$ rectæ HV æquantis abſciſſam HB cum quadrante BV parametri IL, ut defectus cubi rectæ NH potentis q: FH cum q: ſemiparametri LB a cubo rectæ ED potentis hoc q: LB cum q: AD ad $\frac{3}{5}$ hujus cubi.

FINIS.

AP-

Digitized by Google

APPROBATIONES.

ADmodum Rev. Lucas Joſeph Cerracchini attentè legat hunc *Exercitationem Geometricam Laurentii Lorentiini*, & ſi quid contra fidem, ac bonos mores contrarium contineat, referat.

Dat. ex Archiepiſcopali Palatio hac die 4. Januarii 1720. ab Inc.

Horatius Mazzei Vic. Gen.

Illuſtriſſime, ac Reverendiſſime Domine.

Exercitatio hæc *Geometrica* nihil diſſonum Catholicæ Fidei, ac morum puritati alienum continet; Ideo prælo tradendam cenſeo hac die 7. Januarii 1720. ab Inc.

Dominationis Tuæ Illuſtriſs. ac Reverendiſs.

Obſeq. Hum. Ad.
Lucas Joſeph Cerracchini.

Attenta ſupradicta relatione
Imprimatur.

Horatius de Mazzeis Vic. Gen.

EX commiſſione Reverendiſſimi Patris Magiſtri Vincentii de Comitibus, Florentiæ, & ejus Sereniſſimi Dominii Inquiſitoris Generalis, F. R. P. M. Aloyſius Moriconi in Con-

Digitized by Google

Convent. S. Crucis Ord. Min. Conv. Collegii Regens, videat hunc librum, cui titulus, *Exercitatio Geometrica, &c.* & referat an Typis mandandus, &c.

Dat. ex Ædibus hujus S. O. Flor. die 13. an. 1721.

M. Fr. B. Bernardius Min. Conv. Vic. Gen. S. Off.

Reverendiſſime Pater.

Attentè hanc *Geometricam Exercitationem* perlegi, nihilque in ea reperi, quod a recta fide, boniſque moribus diſcrepet, quinimò ſtudioſorum ingenio apprimè conformem; ac utilem judico; ideo ipſam, ut typis mandetur dignam cenſeo.

Hac die 23. Januarii 1721.

Patern. Tuæ Reverendiſſimæ

Humill. atq. Addictiſs. famulus
Fr. Aloyſius Moriconi Stud. ex Coll. Reg.

Attentâ ſupraſcriptâ relatione
Imprimatur.

M. Fr. B. Bernardius Min. Conv. Vic. Gen. S. Off.

Philip. Bonarota Sen. R. C. Aud.

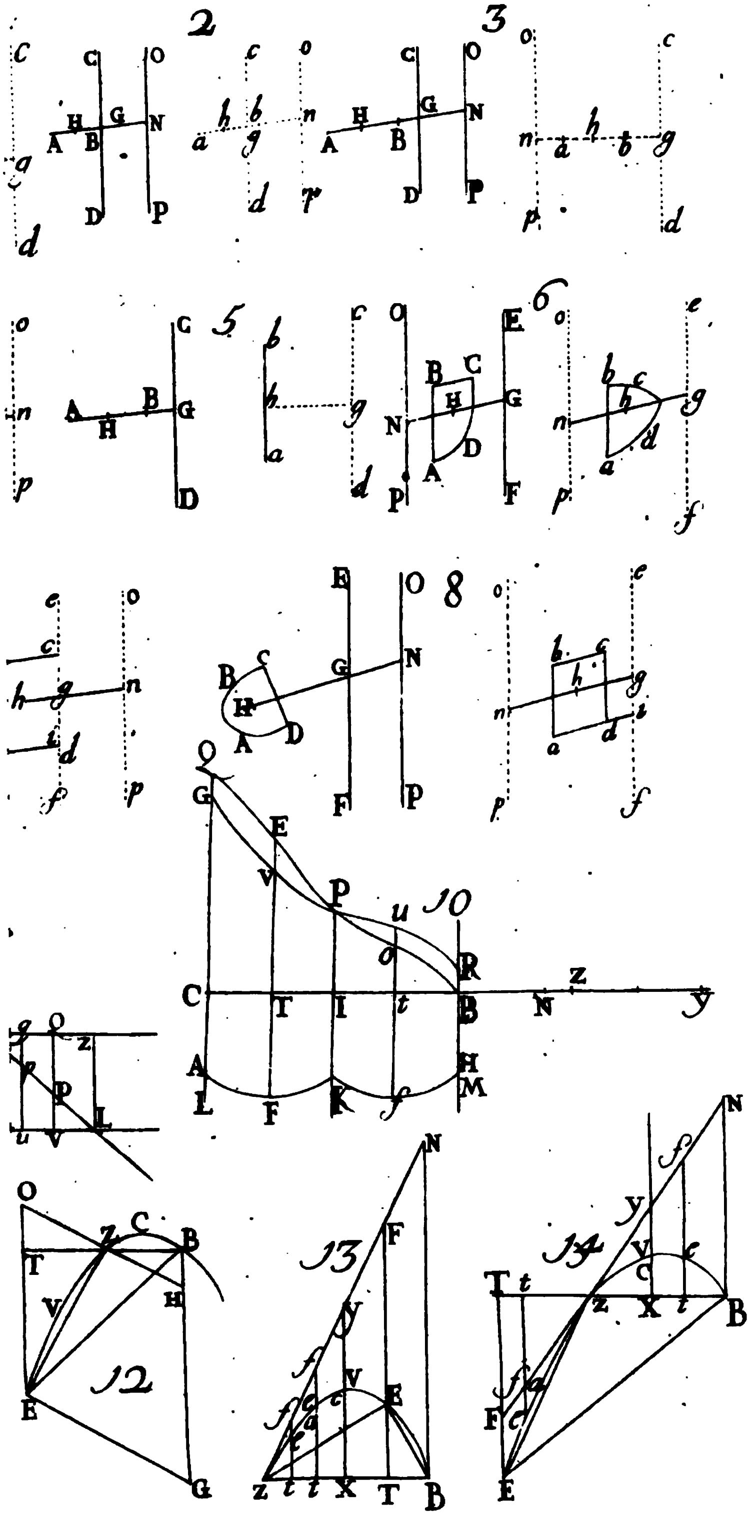
Digitized by Google

Errata ſic emendanda.

PAg. XIII. lin. 23. lege *omnia*. pag. XIV. lin. 2. *quaque*. pag. XVI. lin. 14. *parametri*. pag. XXX. lin. 14. pro AS^3 lege AS^n. pag. XXXIV. lin. 33. pro 2 AB lege 2 Ab. pag. XXXV. lin. 8. *abſciſſarum* ob. lin. 19. *ubique*. lin. 31. *proportionalia*. Pag. 4 lin. 25. in margine lege (*fig.* 7. 8.) pag. 5. lin. 5. *in fig.* 6. *differentia vero in fig.* 7. & 8. lin. 12. *in fig.* 6. 8. lin. 13. *in fig.* 7. pag. 6. lin. 11. *deſcripta*. pag. 12. lin. 22. *componetur*. pag. 13. lin. 26. *quaecumque*. pag. 19. lin. 7. A8DI. lin. 12. *Rect=la* AGE. lin. 24. *ſubſequenter*. pag. 20. lin. 14. TB. pag. 22. lin. 11. in margine *fig.* 28. pag. 26. lin 3. *differentia*. pag. 34. lin. 15. CQ. 21m. lin. 20. *ad trapetium* ALCD. lin. 35. DC. 2nI. pag. 37. lin. 30. *in* EF + FG. pag. 38. lin. 28. *Pariter*. pag. 45. lin. 35. *ſimilis*. pag. 50. lin. 35. 6NO ± 4CO. pag. 62. lin. 17. *compoſita*. pag. 81. lin. 29. *a rect=lo* KN. pag. 90. lin. 16. *productō*. pag. 96. lin. 8. in marg. *fig.* 166. pag. 100. lin. 18. LB *in q*: ad. lin. 21. LB, KD. lin. 23. *in q*: ad lin. 24. LB *in q*: ad, *ſeu*. pag. 101. l. 29. *major*. pag. 102. lin. 19. $+ AB^3 \bowtie OB^m$. lin. 22. $ab^3 \bowtie bo^m$. pag 110. l. 19. *Differentia*. pag. 111. lin. 1. *communiter*. pag. 115. lin. 13. *rectum*. pag. 116. lin. 21. *producti*,

Digitized by Google

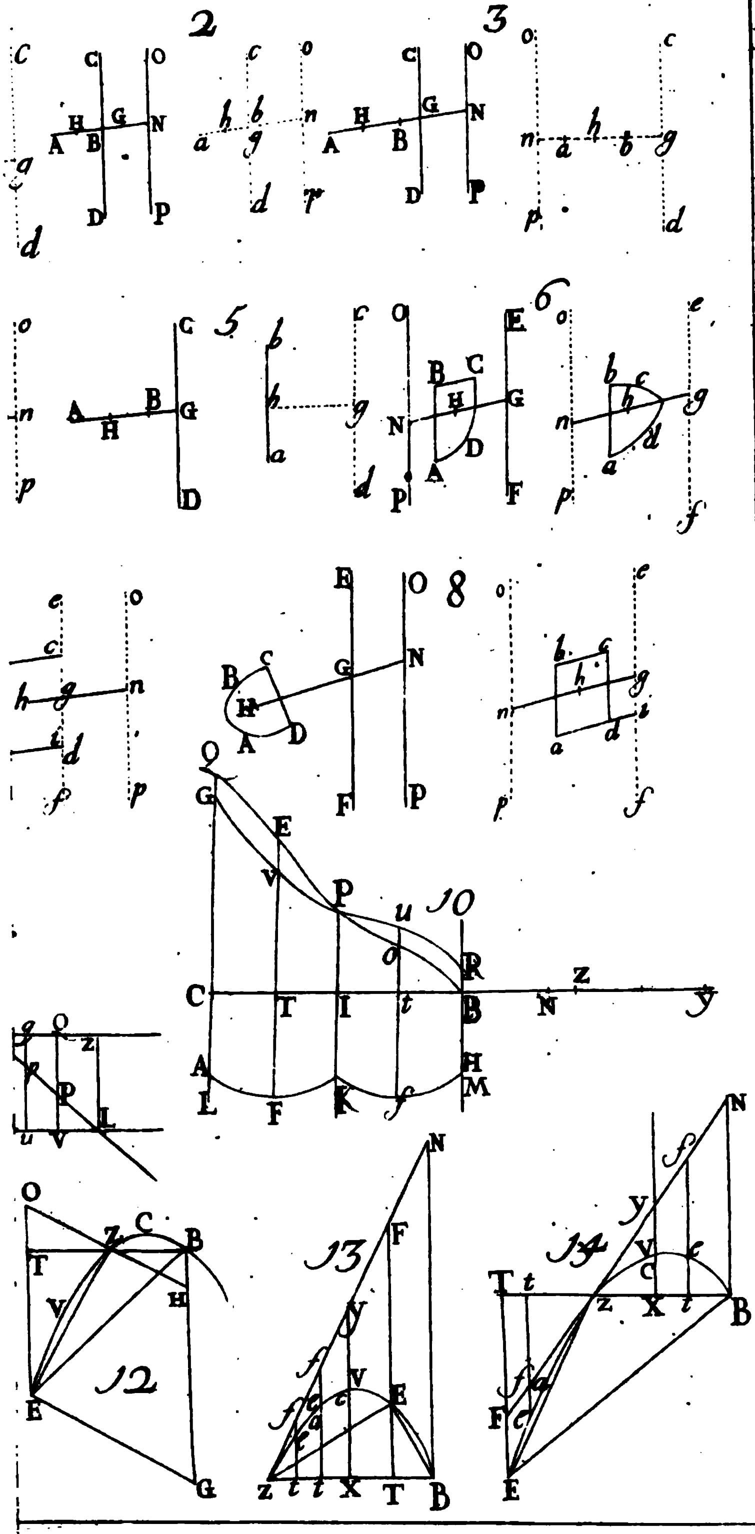
Tab. I



Digitized by Google

Digitized by Google

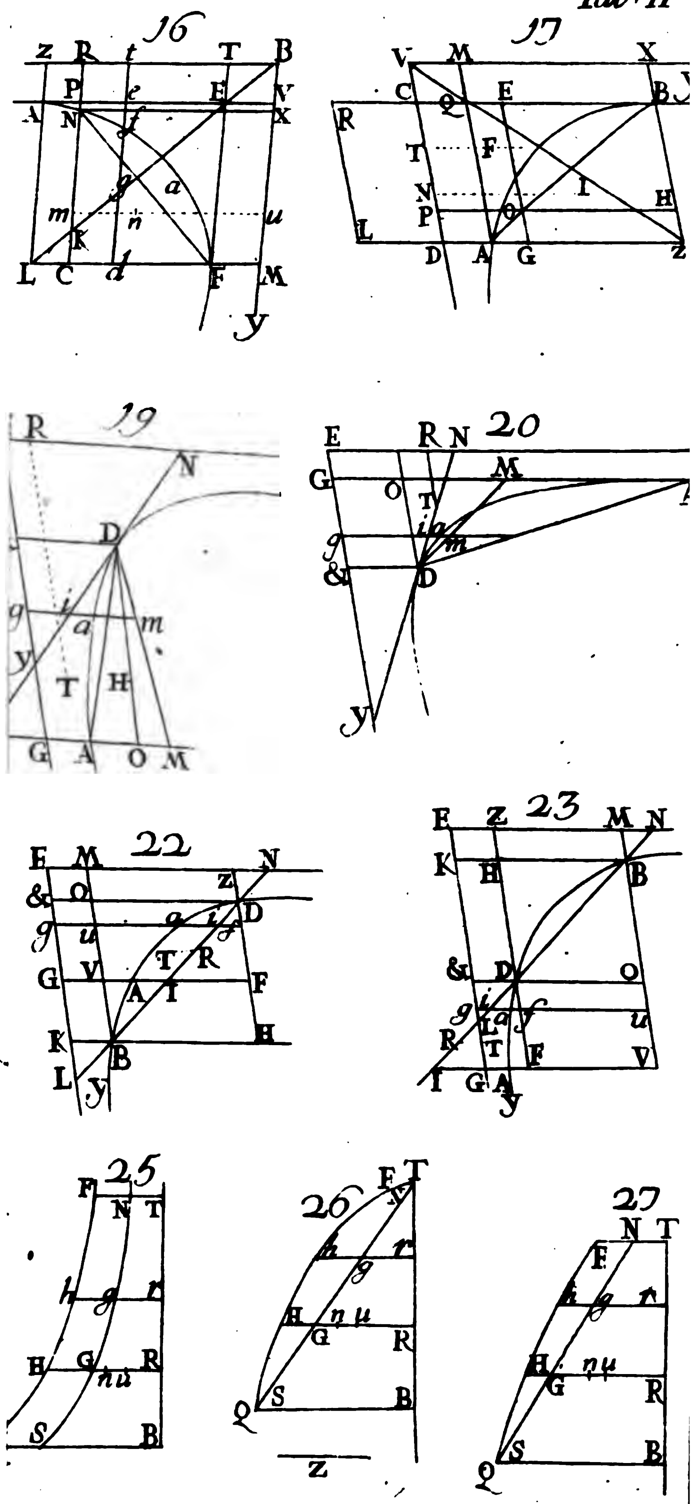
Tab. I



Digitized by Google

Digitized by Google

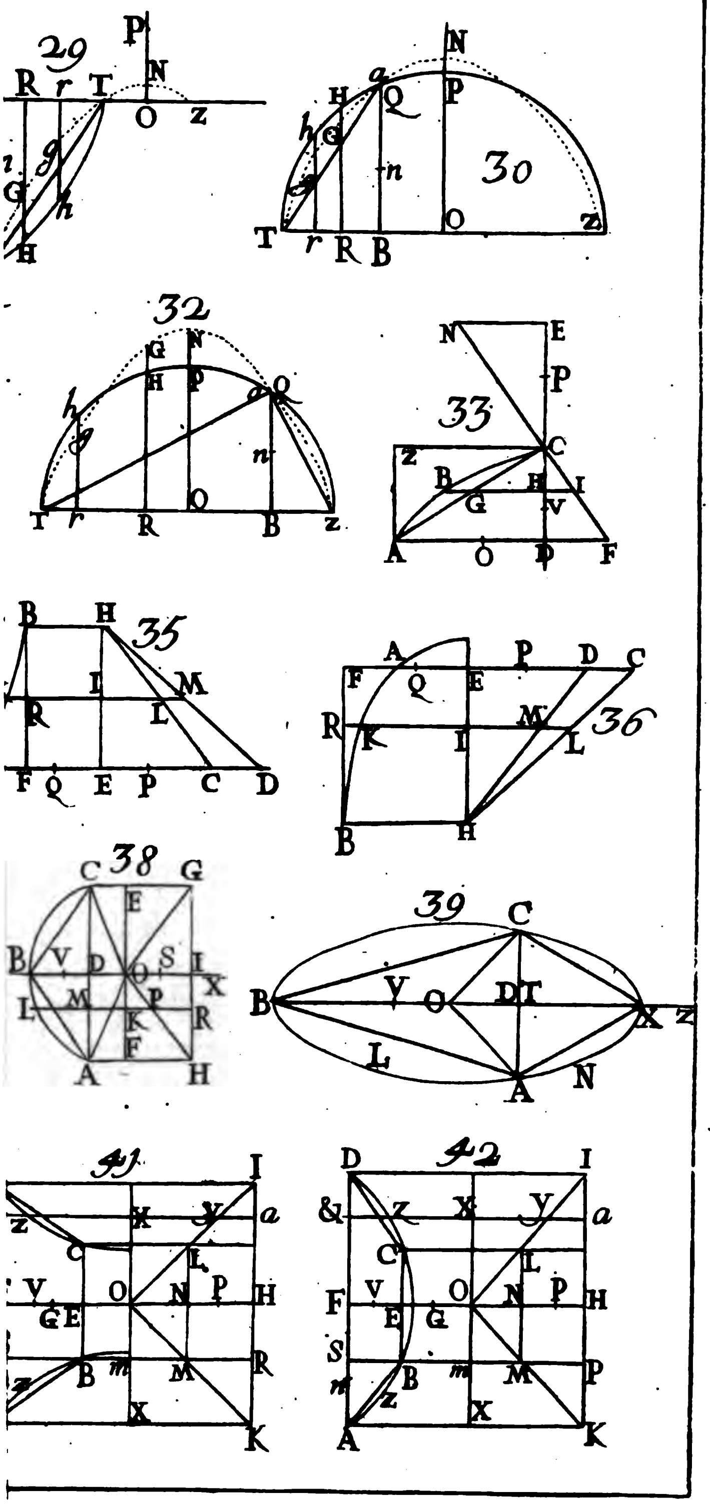
Tab. II



Digitized by Google

Digitized by Google

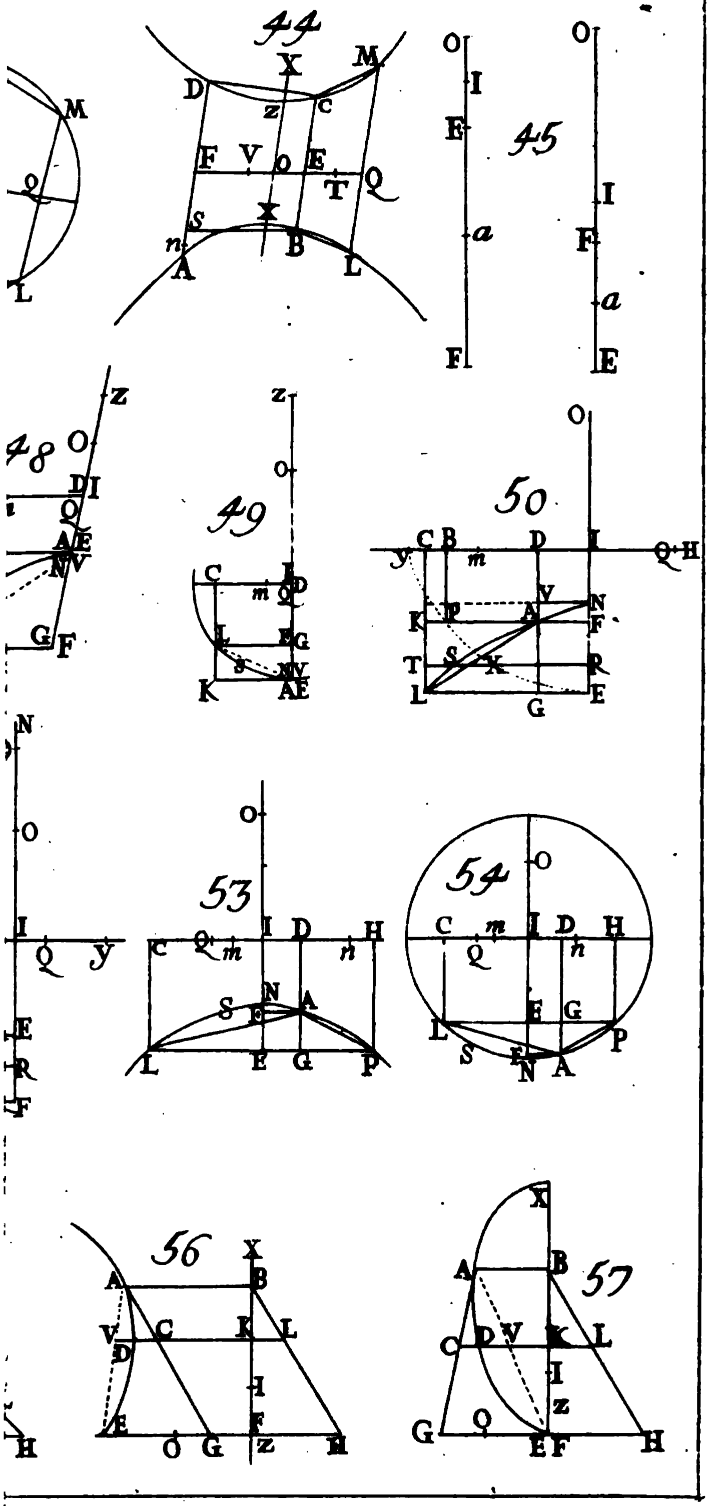
Tab. III



Digitized by Google

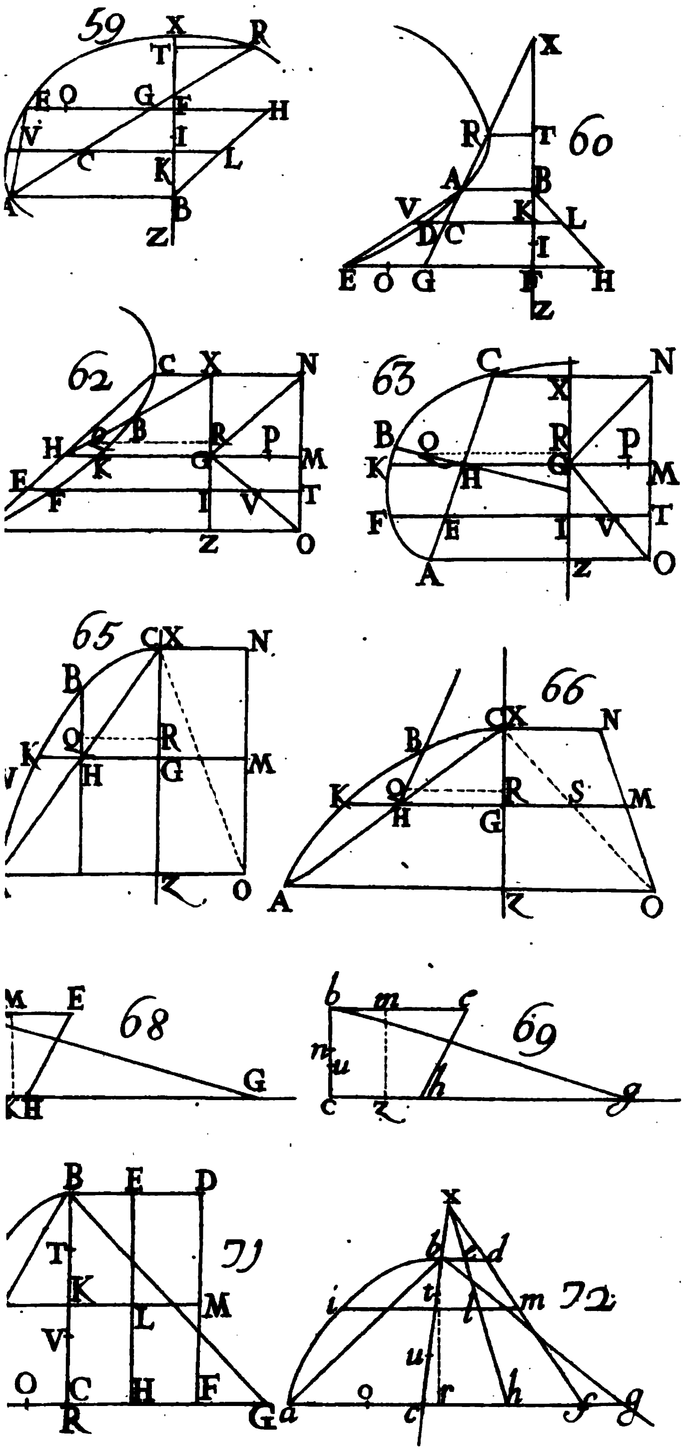
Digitized by Google

Tab. IV



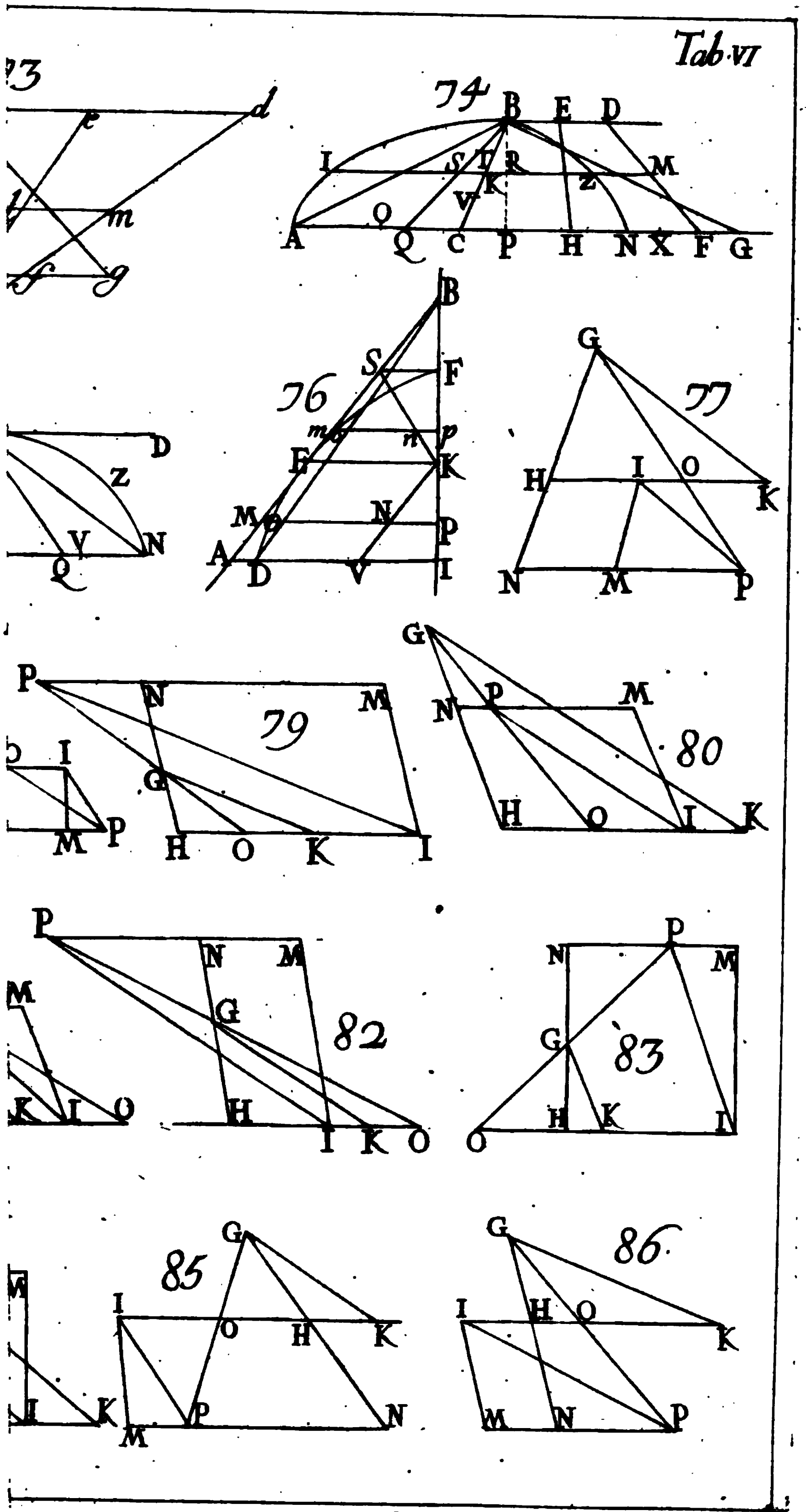
UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

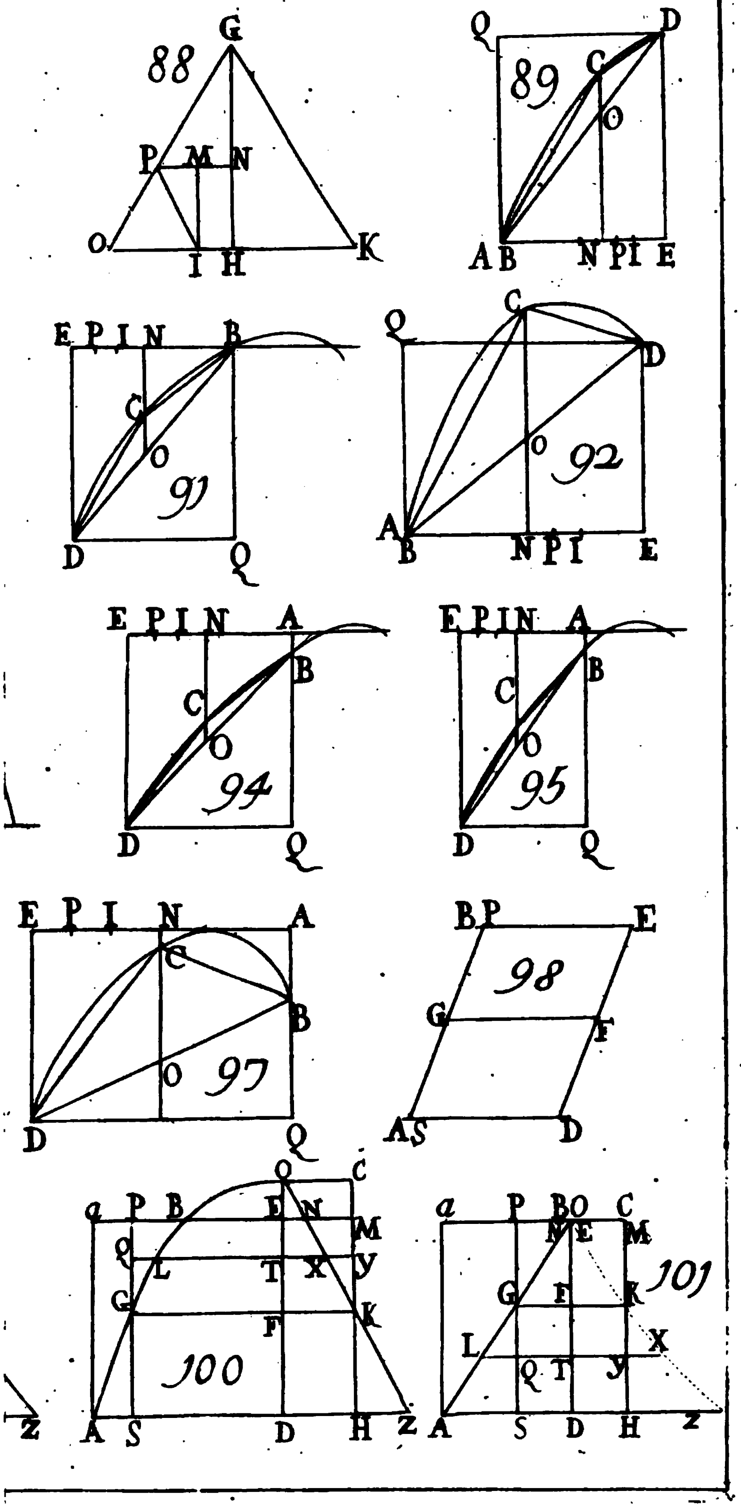
Digitized by Google



Digitized by Google

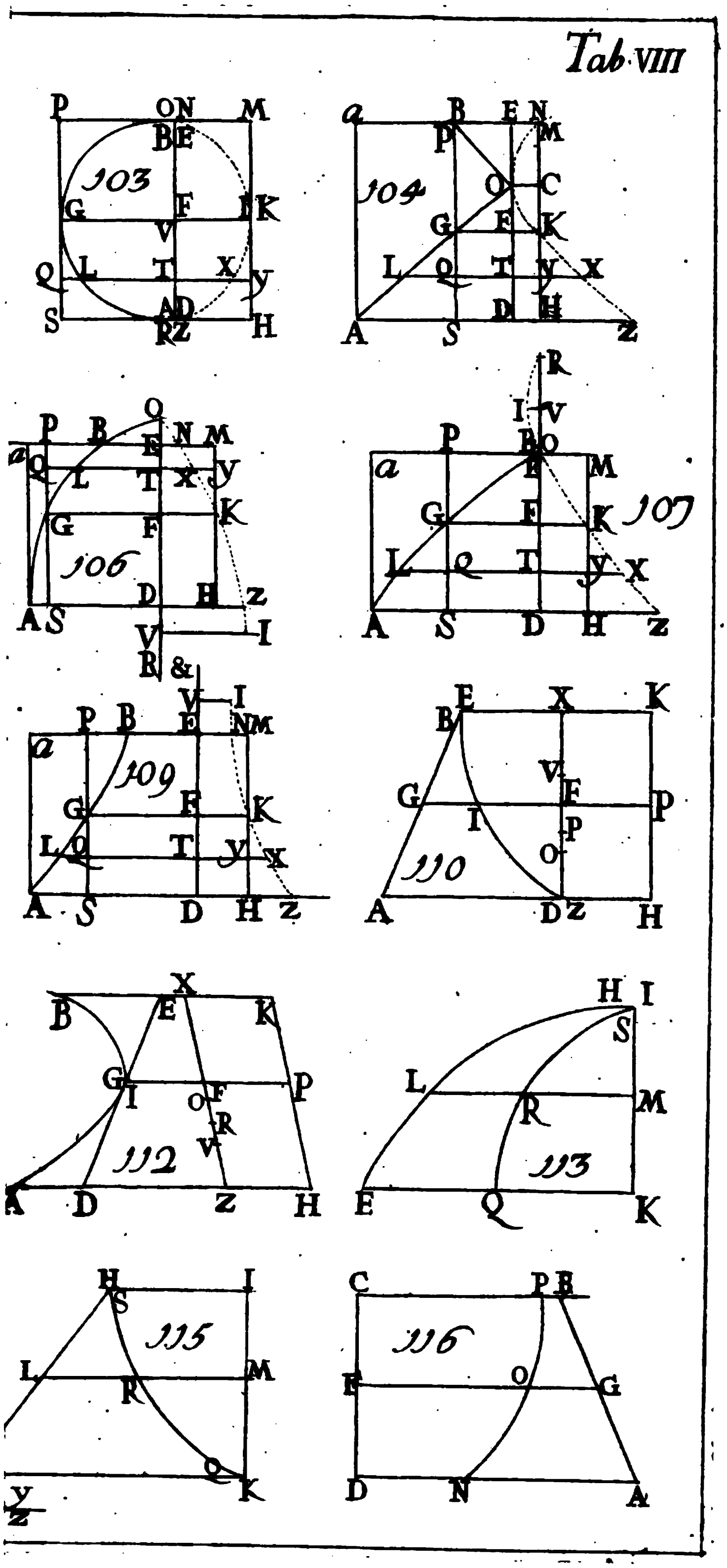
Digitized by Google

Tab. VII



Digitized by Google

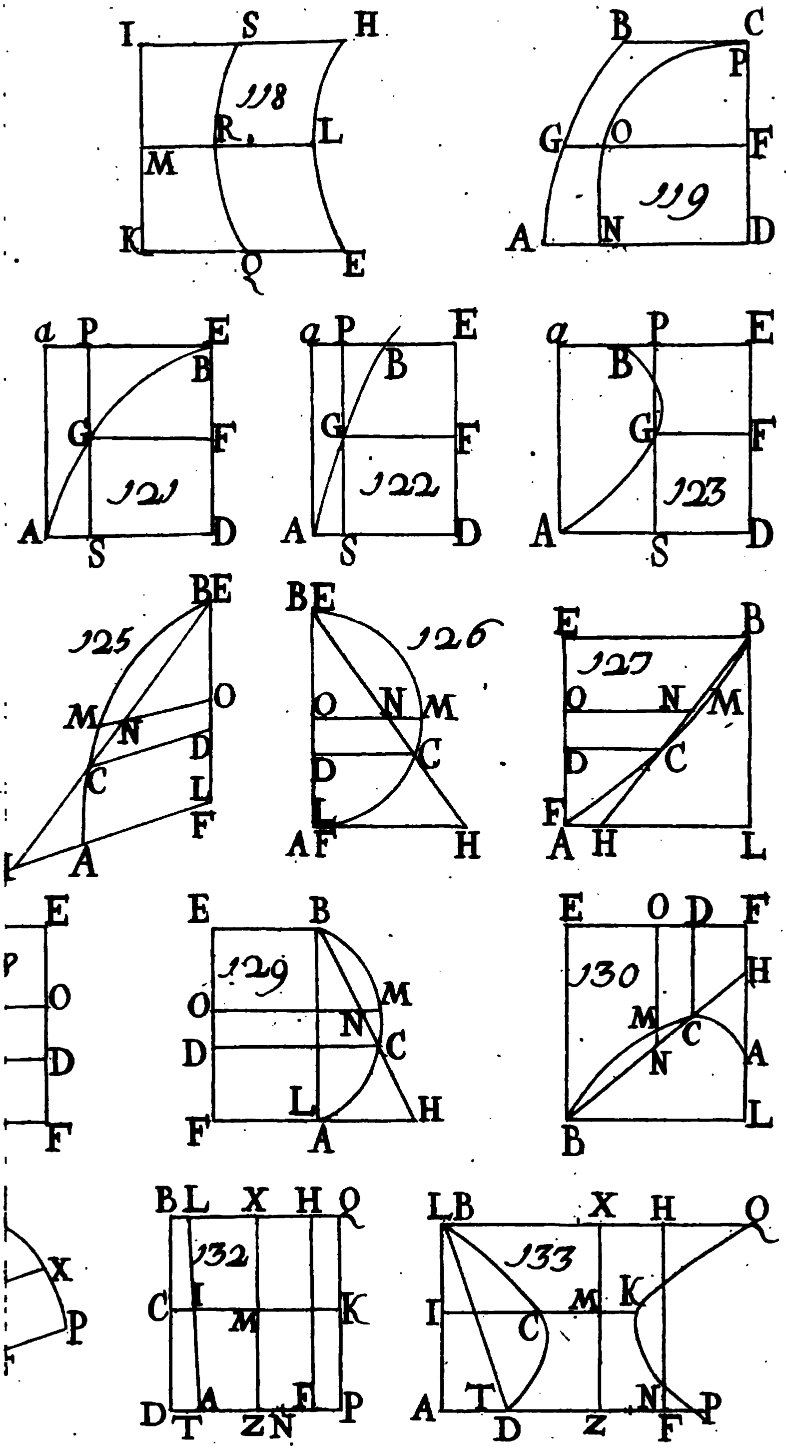
Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

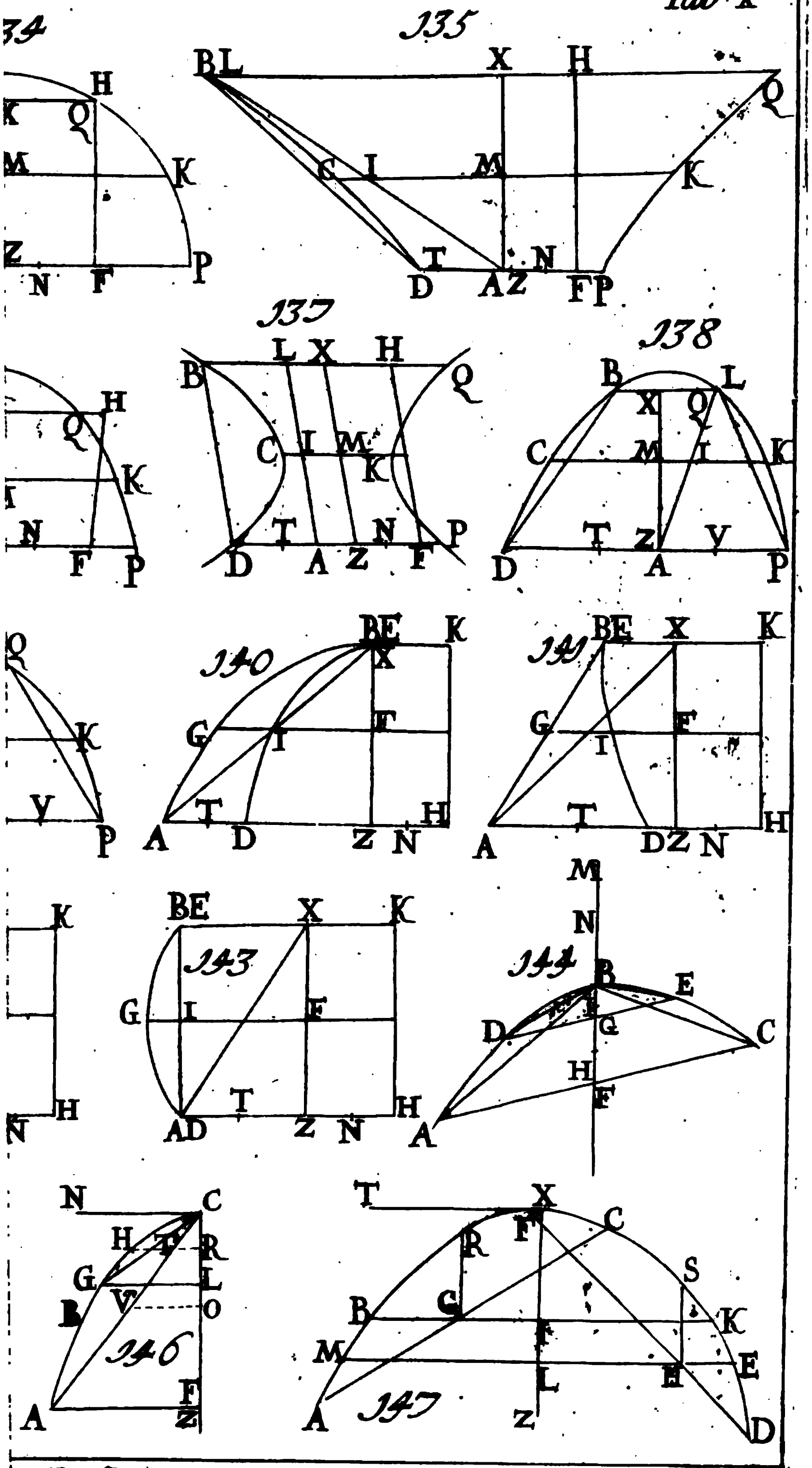
Tab. IX



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

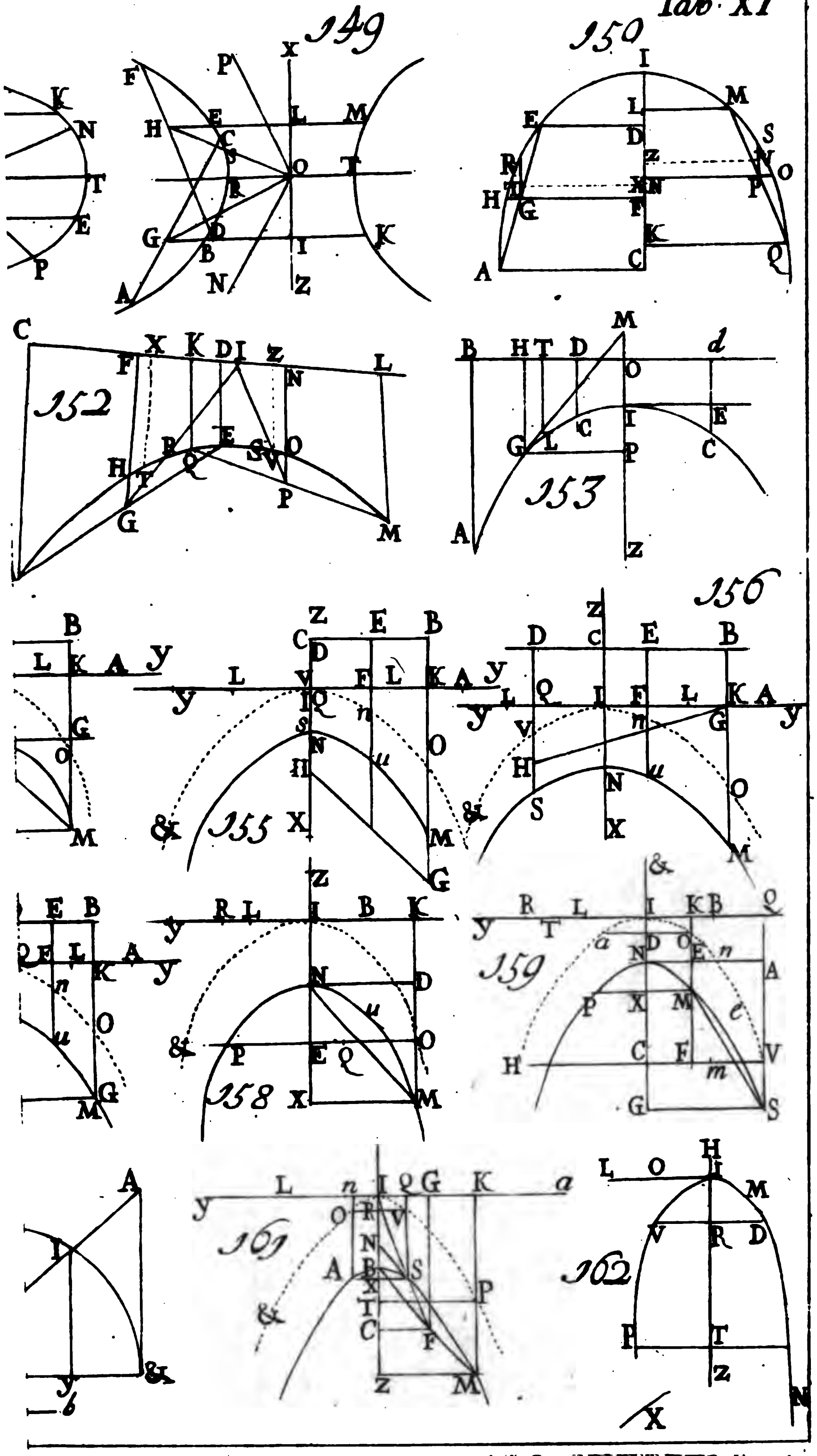
Digitized by Google

Tab. X



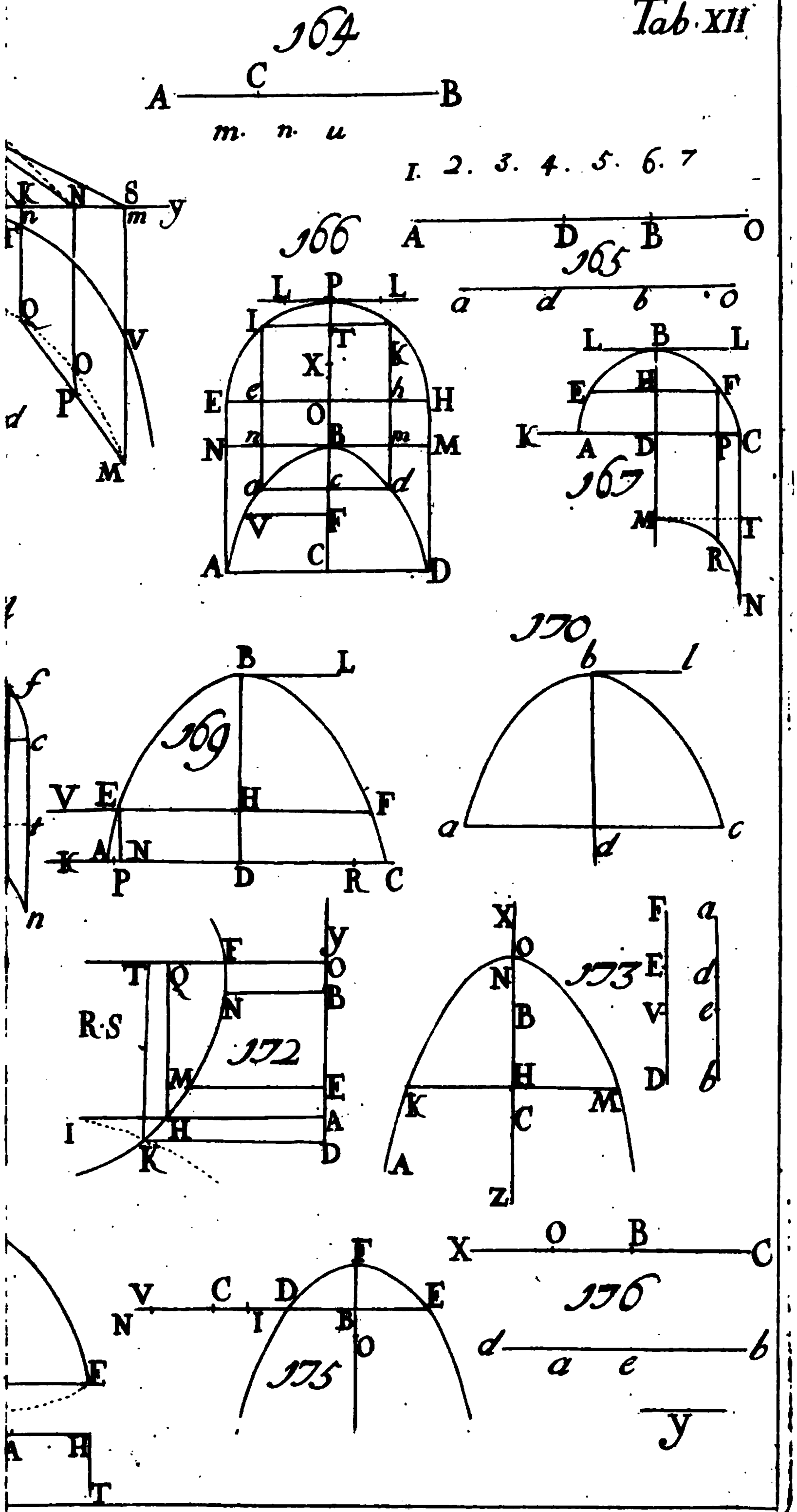
Digitized by Google

Tab. XI



Digitized by Google

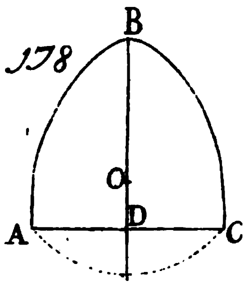
Tab. XII

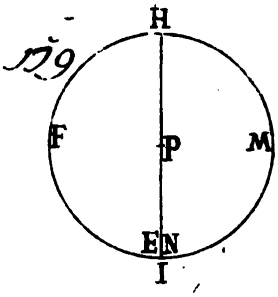


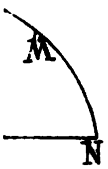
Digitized by Google

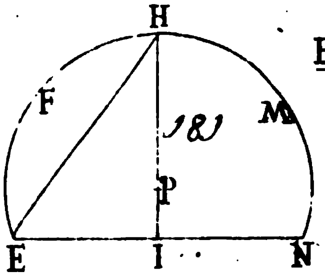
Digitized by Google

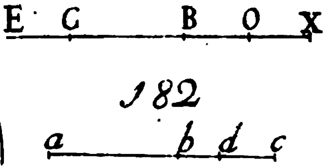


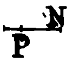


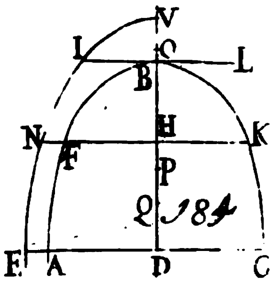


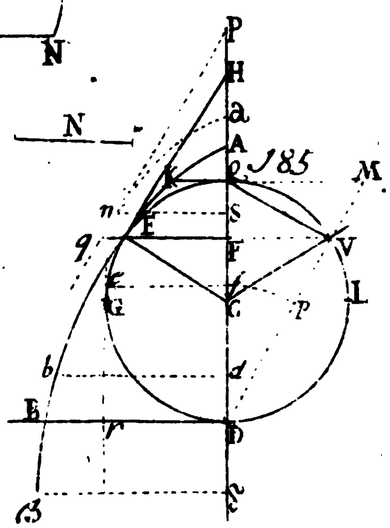


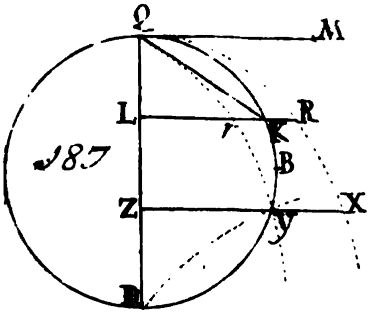




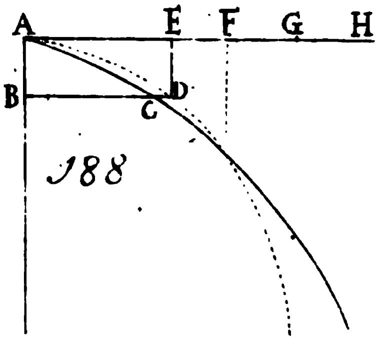






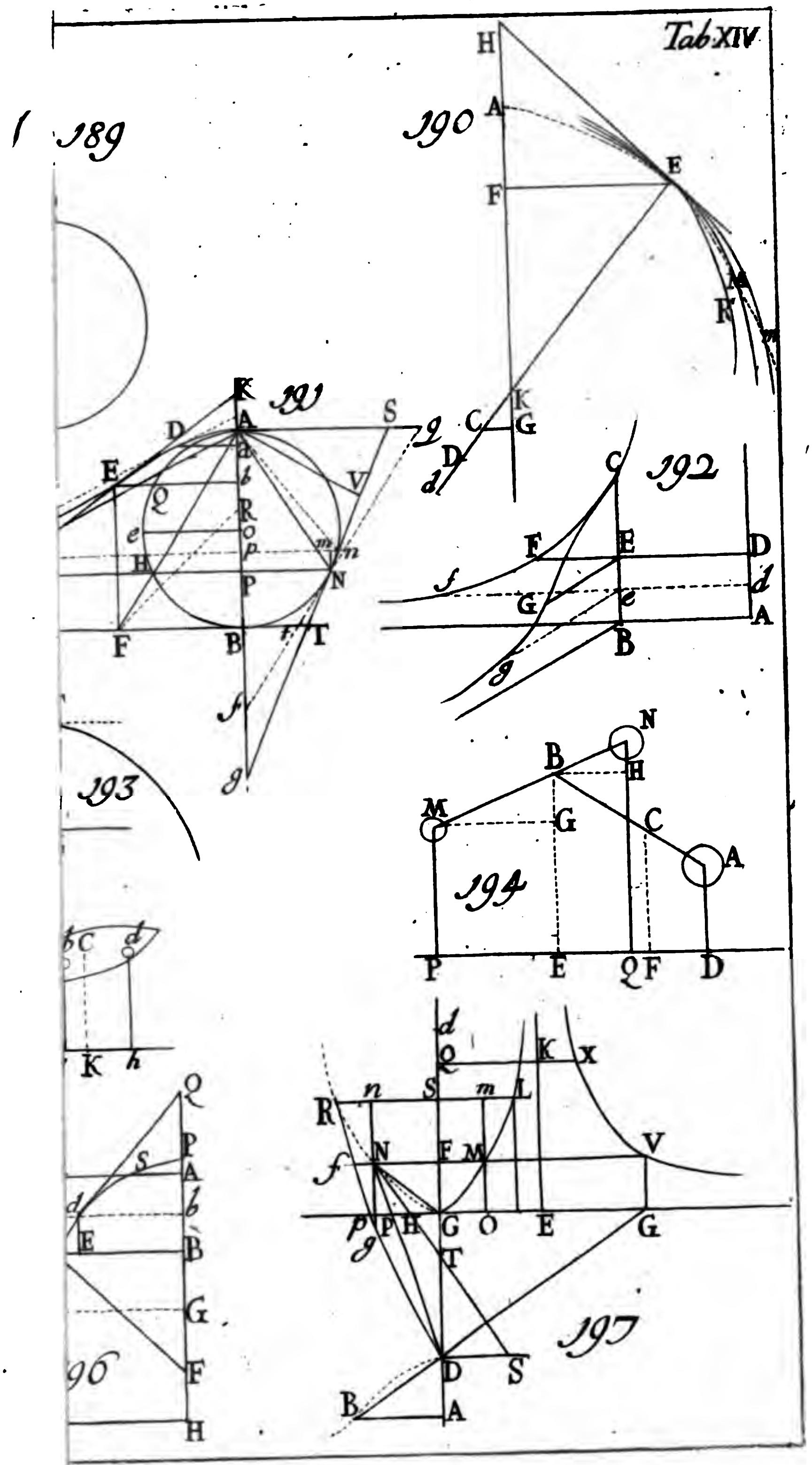


N



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06525 8884

B 449772 DUPL

Digitized by Google

Digitized by Google